

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

Расчет плоской рамы методом сил

Ульяновск 2005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

Расчет плоской рамы методом сил

Методические указания

Составитель А. Н. Черный

Ульяновск 2005

УДК 539.3(076)

ББК 38.112 я7

Р24

Рецензент доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» строительного факультета Ульяновского государственного технического университета И. Н. Карпунина

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

Р24 Расчет плоской рамы методом сил: методические указания / сост. А. Н. Черный. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 18с.

Указания составлены в соответствии с программой курса «Строительная механика» и предназначены для студентов строительных специальностей.

Приведенный материал может быть использован для выполнения студентами соответствующей расчетно-графической работы, а также инженерами, работающими в области расчета стержневых систем.

Работа подготовлена на кафедре «ТиПМ».

УДК 539.3(076)

ББК 38.112 я7

© Черный А. Н., составление, 2005

© Оформление, УлГТУ, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА.....	4
1.1. Кинематический анализ	4
1.2. Построение основной системы	4
1.3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов.....	8
1.4. Формирование системы уравнений и её решение	8
1.5. Построение эпюры изгибающего момента	9
1.6. Построение эпюры поперечной силы	11
1.7. Построение эпюры продольной силы	11
1.8. Статическая и кинематическая проверки	13
2. ПРИМЕР РАСЧЕТА	13
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	18

1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА

1.1. Кинематический анализ

Стержневая система называется *статически неопределимой* в том случае, если уравнений статики недостаточно для определения реакций опор и внутренних силовых факторов во всех стержнях системы.

Степенью или числом статической неопределимости стержневой системы называется *количество «лишних» кинематических связей* или разность между числом всех связей (число неизвестных) и числом уравнений статики.

Минимальное число кинематических связей, при котором достигается геометрическая неизменяемость системы, является необходимым числом связей. Для плоской задачи необходимое число связей равно трем, что соответствует числу уравнений статики. Связи, наложенные сверх необходимого числа, являются дополнительными, или «лишними».

Различают внешние и внутренние кинематические связи. Для задачи только с внешними кинематическими связями (рис. 1.1,а,б), которые могут быть наложены только опорными стержнями и шарнирами, число «лишних» связей в раме можно определить по формуле

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д, \quad (1.1)$$

где L – число «лишних» связей,

C_0 – число опорных стержней,

$Ш$ – число простых шарниров,

$Д$ – число дисков.

Для определения числа дисков можно пользоваться формулой

$$Д = Ш + 1.$$

В замкнутых контурах стержневых систем (рис. 1.1,б), имеют место внутренние кинематические связи, т. е. ограничения, наложенные на взаимное смещение стержней. «Жесткий» контур имеет три кинематические связи, контур с шарниром – две, а контур с элементом фермы (затяжка) – одну кинематическую связь.

1.2. Построение основной системы

Основной системой (ОС) называется такая стержневая система, которая статически определимая, геометрически неизменяемая и эквивалентная заданной (ЗС). Действие отброшенных «лишних» связей заменяется соответствующими силами и моментами и, следовательно, к основной системе, кроме заданной нагрузки, прикладываются неизвестные силы, число которых равно числу отброшенных связей.

Далее необходимо сформировать уравнения неразрывности деформаций (отсутствия перемещений) метода сил. Неизвестные силы должны быть такими, чтобы в основной системе перемещения точек приложения этих сил

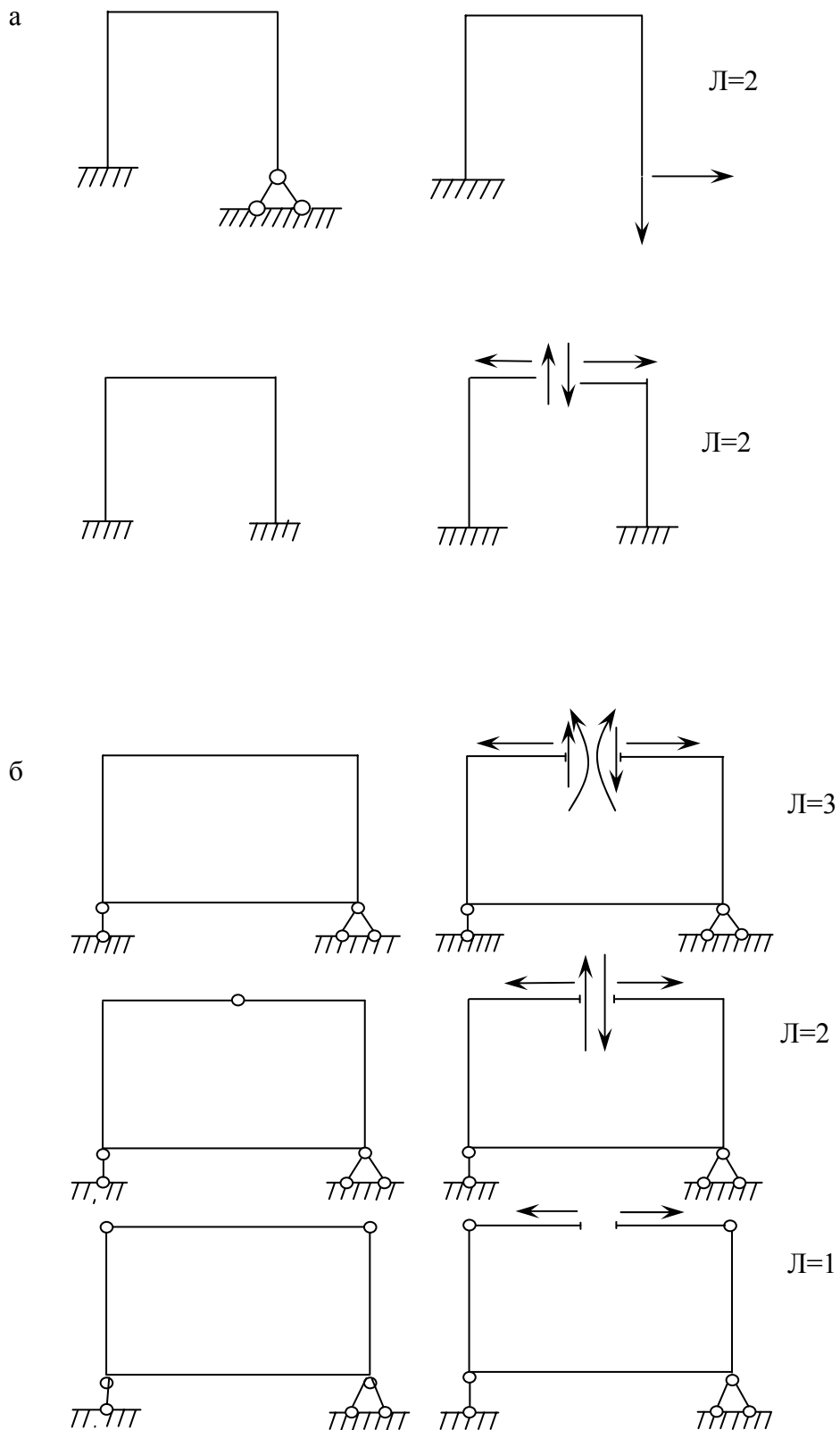


Рис. 1.1 Примеры кинематического анализа
 а – рамы с внешними кинематическими связями; б – рамы с внутренними кинематическими связями

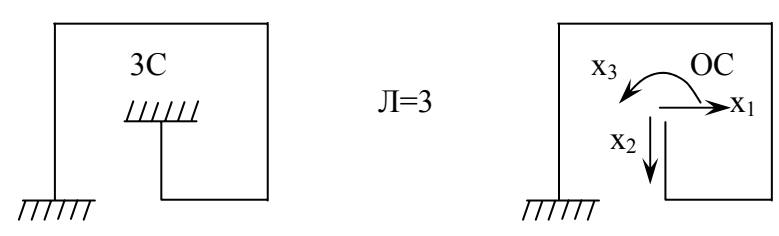
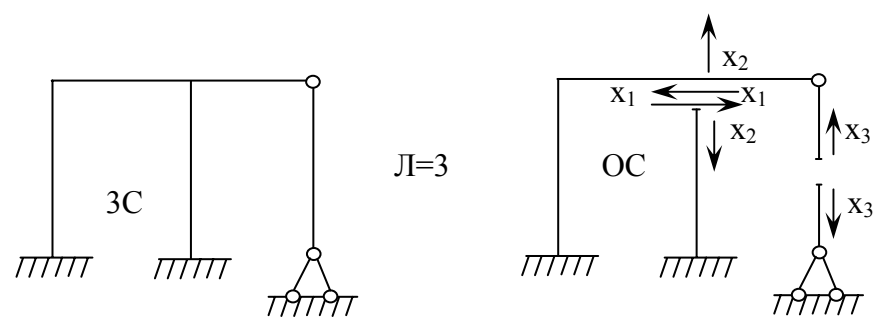
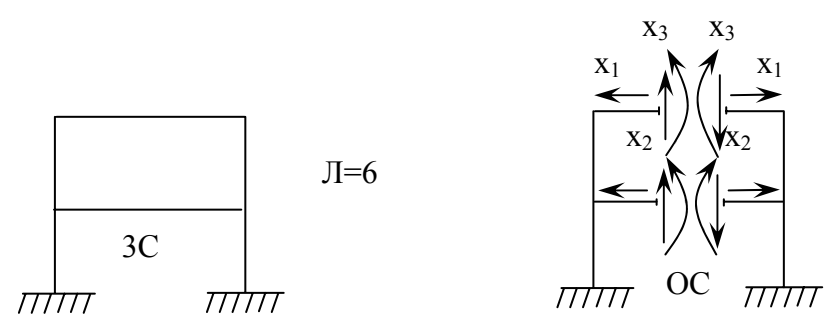
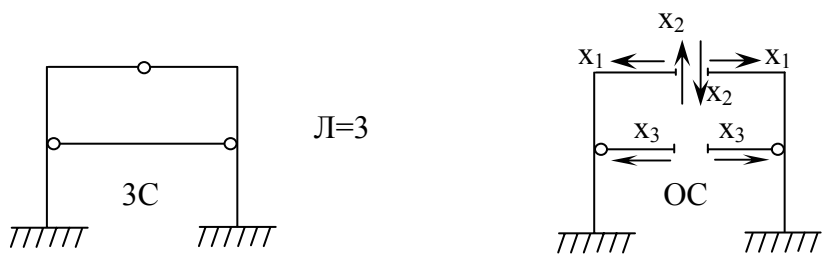


Рис. 1.2. Примеры заданных и основных систем рам

1.3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов

На третьем этапе решения задачи прежде всего необходимо определиться с единицами измерений длины и силы, которые будут использоваться в расчете. Грузовая эпюра M_p от заданной нагрузки определяет единицы измерений, принятые в расчете.

Число вспомогательных эпюр изгибающих моментов, которые необходимо построить на основной системе, на единицу больше степени статически неопределимости задачи. Единичные эпюры строятся от поочередного действия искомых сил, равных безразмерной единице, по выбранному направлению, а грузовая эпюра – от заданной нагрузки. Построение этих эпюр выполняется на статически определимой системе (ОС) и рассматривалось в предыдущих разделах курса. Единицы измерений на единичных эпюрах моментов не ставятся.

1.4. Формирование системы уравнений и её решение

Чтобы получить систему уравнений (1.2), необходимо вычислить все перемещения, которые входят в уравнение как коэффициенты при неизвестных или как свободные члены. Определение перемещений выполняется вычислением интеграла Мора (влияние продольных и поперечных сил на перемещение незначительно и поэтому не учитывается):

$$\Delta_{ip} = \sum_1^n \int_L \frac{M_p \cdot \bar{M}_i}{EI} dx,$$

где M_p – изгибающий момент от действия внешних сил,

\bar{M}_i – изгибающий момент от действия единичной силы,

EI – жесткость сечения стержня в плоскости изгиба,

L – длина участка,

n – число участков.

За границы участков принимаются сечения, в которых приложена нагрузка, происходит изменение направления оси стержня (узлы), а также изменение жесткости сечения.

В тех случаях, когда рама имеет прямолинейные участки с постоянной жесткостью, вычисление интеграла Мора можно выполнить с помощью формулы Верещагина – «перемножения» эпюр:

$$\Delta_{ip} = \sum_1^n \frac{F_{mp} \cdot Y_{mi}}{EI}, \quad (1.3)$$

где F_{mp} – площадь эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки M_p ,

Y_{mi} – ордината эпюры \bar{M}_i , расположенная под центром тяжести эпюры M_p .

Согласно (1.3), правило Верещагина можно сформулировать следующим образом: чтобы «перемножить» эпюры, необходимо площадь одной эпюры умножить на ординату другой, лежащей против центра тяжести первой эпюры, и разделить на жесткость сечения участка при изгибе.

Результат «перемножения» эпюр положительный в том случае, если обе эпюры расположены с одной стороны участка, и отрицательный, если эпюры расположены с разных сторон.

Линейные эпюры обладают свойством коммутативности, т. е. при «перемножении» линейных эпюр можно выбрать наиболее рациональный путь. Так, на участках эпюры с постоянным моментом рекомендуется всегда брать ординату Y_{mi} .

Ниже, в таблице 1.1, приведены формулы значений площади и координаты центров тяжести некоторых геометрических фигур, на которые могут быть расслоены различные варианты эпюр.

В качестве примера «перемножения» эпюр и их расслоения (наиболее сложный вариант) определим перемещение Δ_{ip} как результат «перемножения» эпюр M_p и \bar{M}_i (рис. 1.3).

Эпюра M_p расслоена на прямоугольник, треугольник и фигуру, очерченную квадратной параболой ($q = \text{const}$), а M_i – на прямоугольник и треугольник.

Умножаем поочередно три площади эпюры M_p на ординаты M_i с учетом знака эпюр:

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI} \left(a \cdot L \left(d - \frac{c+d}{2} \right) + \frac{(a+b) \cdot L}{2} \left(-d + \frac{c+d}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2 \cdot qL^2 \cdot L}{3 \cdot 8} \left(d - \frac{c+d}{2} \right) \right).$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов системы уравнений (1.2) необходимо «перемножить» по участкам вспомогательные эпюры изгибающих моментов с соответствующими индексами.

Решение системы уравнений неразрывности деформаций метода сил рекомендуется выполнять методом исключений Гаусса. В результате решения уравнений определяются искомые силы.

1.5. Построение эпюры изгибающего момента

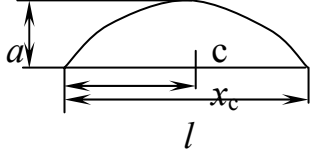
На основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией можно записать следующее выражение для изгибающего момента:

$$M = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_p, \quad (1.4)$$

которое позволяет построить эпюру изгибающего момента для основной системы от заданной нагрузки и искомых сил, т. е. для заданной системы задачи от нагрузки, ввиду их эквивалентности.

При построении вспомогательных эпюр изгибающего момента $\bar{M}_1 x_1, \bar{M}_2 x_2, \dots, \bar{M}_n x_n$, для заданной схемы от действия искомых сил x_1, x_2, \dots, x_n

Таблица 1.1

Геометрические фигуры	Площадь F	Координата x_c
	$\frac{al}{2}$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{al}{3}$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{2al}{3}$	$\frac{3}{8}l$
	$\frac{2al}{3}$	$\frac{l}{2}$

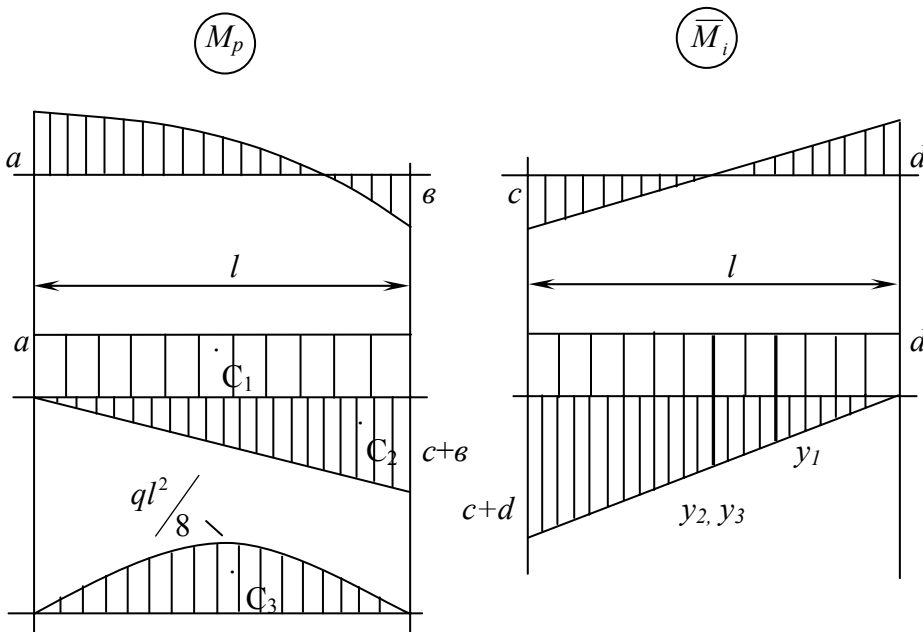


Рис. 1.3. Расслоение вспомогательных эпюр моментов

необходимо увеличить все ординаты соответствующих единичных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ в x_1, x_2, \dots, x_n раз с учетом их знака.

Согласно (1.4) сложение эпюр выполняется для каждого участка по их границам.

1.6. Построение эпюры поперечной силы

Эпюра поперечной силы строится путем дифференцирования эпюры изгибающего момента.

Дифференцирование эпюры выполняется по участкам. На рис. 1.4 приведены примеры дифференцирования эпюр изгибающего момента и соответствующие эпюры поперечной силы.

На рис. 1.4,а рассмотрены варианты линейного изменения ординат эпюры изгибающего момента на участке длиной l (участок без нагрузки), а на рис. 1.4,б – изменение ординат по квадратной параболе (участок нагружен распределенной нагрузкой q).

Значения поперечной силы на участке слева Q_l и справа Q_{np} вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} Q_l &= Q_l^0 + tg\alpha, \\ Q_{np} &= Q_{np}^0 + tg\alpha, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где Q_l^0 и Q_{np}^0 – соответственно значения поперечной силы слева и справа от действия нагрузки на участке,

$tg\alpha$ – тангенс угла наклона линейной составляющей эпюры моментов.

Очевидно, для участков без нагрузки (рис. 1.4,а)

$$Q_l^0 = Q_{np}^0 = 0,$$

и значение поперечной силы равно $tg\alpha$. Знак поперечной силы определяется по характеру наклона эпюры моментов (см. рис. 1.4). Для участков, нагруженных распределенной нагрузкой q (рис. 1.4,б), эпюра моментов расщепляется на линейную эпюру и эпюру от заданной нагрузки.

На линейной составляющей вычисляется тангенс угла наклона эпюры, а от нагрузки вычисляются реакции (как в двухопорной балке), которые и определяют величину и знак поперечной силы в соответствии с правилом знаков для их построения.

1.7. Построение эпюры продольной силы

Эпюра продольной силы строится по эпюре Q путем поочередного вырезания узлов и составления уравнений равновесия узла:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0. \end{aligned}$$

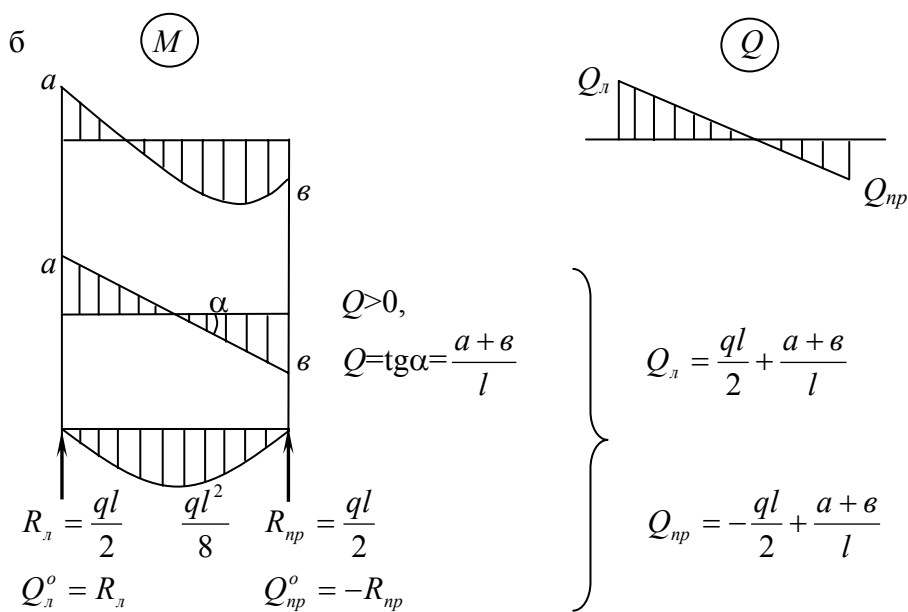
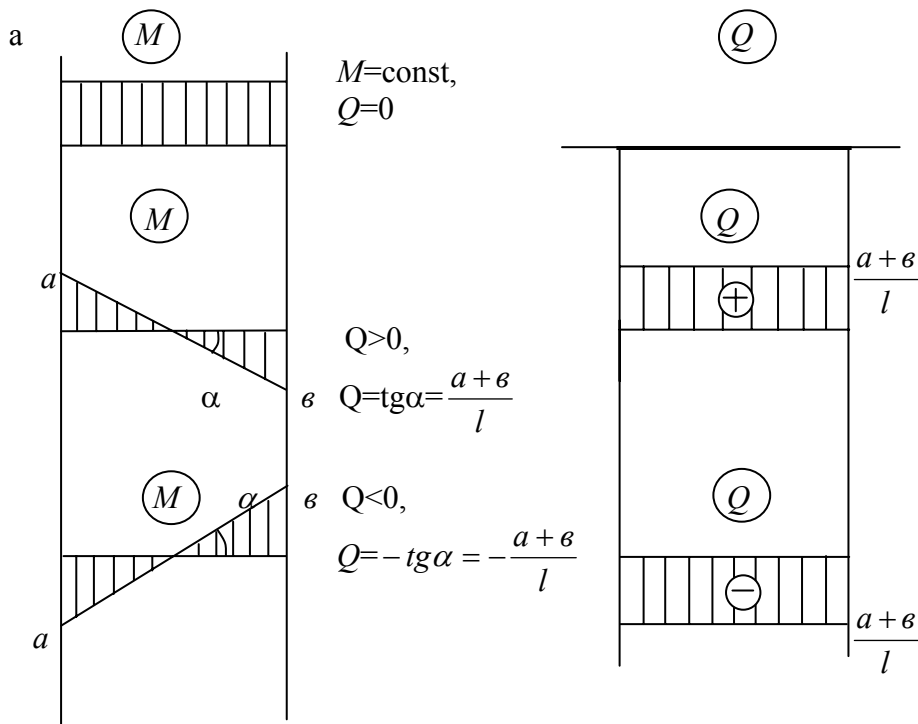


Рис.1.4. Примеры построения эюр поперечной силы
а – линейное изменение ординат; б – изменение ординат по параболе

Поперечные силы, действующие в стержнях узла, уравниваются искомыми продольными силами.

1.8. Статическая и кинематическая проверки

Необходимым условием контроля решения задачи являются статическая проверка: равенство нулю суммы нагрузки и реакции опор, т. е. $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$. Реакции опор определяются непосредственно на эпюрах поперечной и продольной сил.

Кинематическая (деформационная) проверка заключается в равенстве нулю перемещений по направлению «лишних» связей и ее рекомендуется выполнять путем «перемножения» эпюры изгибающих моментов на суммарную эпюру от единичных сил, т. е. $\Delta = M \cdot \bar{M}_S = 0$, где $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n$.

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной схемы рамы (ЗС) построить эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил методом сил. Выполнить статическую и кинематическую проверки. $EI = \text{const}$ (рис. 2.1).

1. Кинематический анализ.

$$W=3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 7 = -3, \quad Л = 3.$$

Задача трижды статически неопределимая.

2. Построение основной системы.

Основная система (ОС) образована путем отбрасывания внешних кинематических связей.

Система уравнений неразрывности деформации будет:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов.

Вспомогательные эпюры приведены на рис. 2.1, на котором представлены и реакции опор, необходимые для построения эпюр. При этом эпюры M_s и M_p строятся справа: присоединенный шарнир меняется на эквивалентную шарнирно-неподвижную опору, в которой определяются реакции. Далее, реакции меняются на силы, которые и нагружают левую часть рамы.

Единицы измерений: длина – метр, сила – тонна.

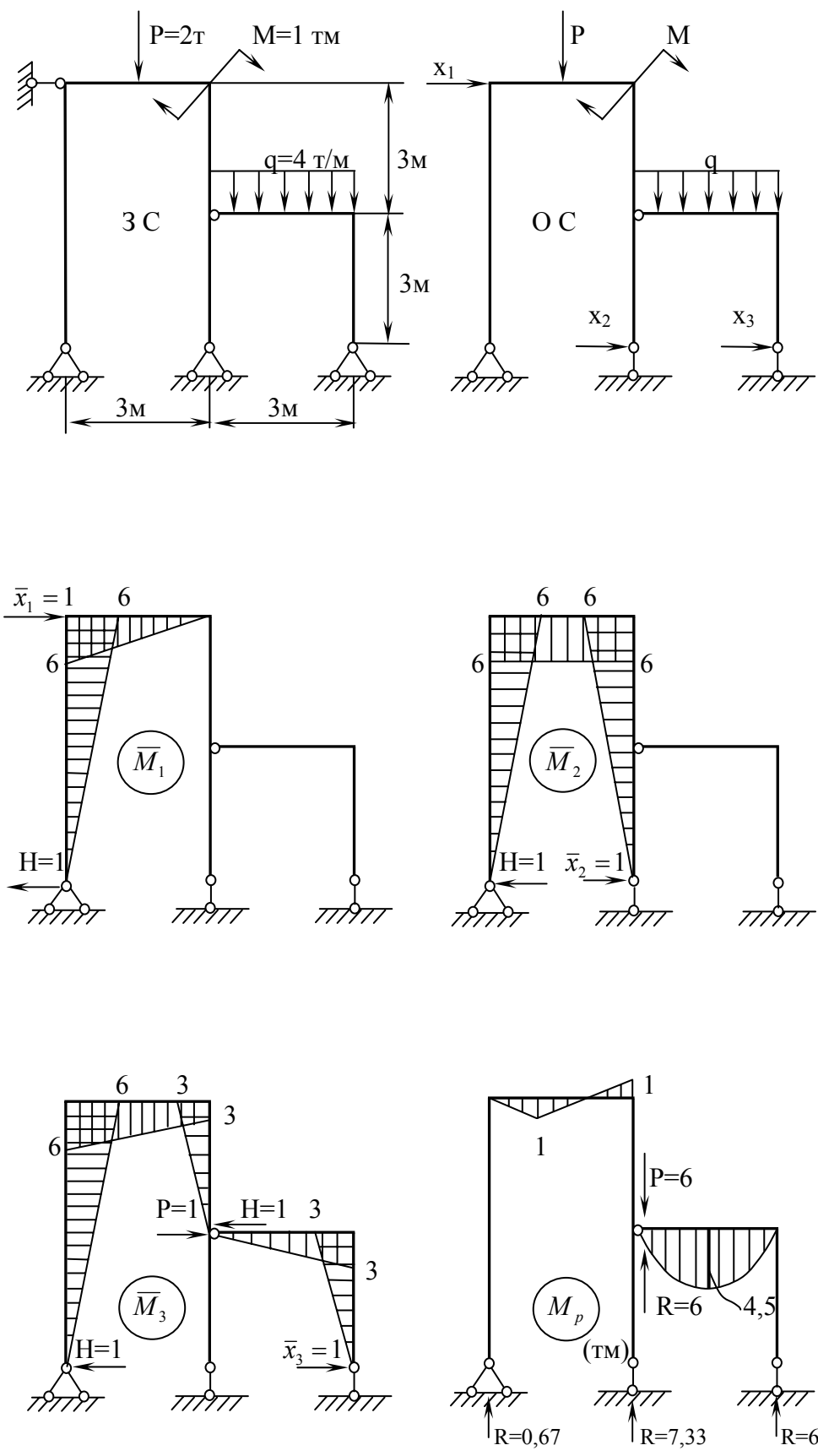


Рис. 2.1. Вспомогательные эпюры изгибающего момента

4. Формирование системы уравнений и ее решение.

«Перемножение» вспомогательных эпюр выполнено по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 1/EI(1/6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + 1/2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 6) = 108/EI, \\ \delta_{12} &= 1/EI(1/2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + 1/2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6) = 126/EI, \\ \delta_{22} &= 1/EI(2 \cdot 1/2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6) = 252/EI, \\ \delta_{23} &= 1/EI(1/2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + (6+3)/2 \cdot 3 \cdot 6 + 3/6(2 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3)) = 175.5EI, \\ \delta_{13} &= 1/EI(1/2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + 3/6(2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 6)) = 117EI, \\ \delta_{33} &= 1/EI(1/2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 + 3/6(2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3) + \\ &\quad + 3 \cdot 1/2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 3) = 162/EI, \\ \Delta_{1p} &= 1/EI(1.5/6(2 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot 1) + 1.5/6(2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1)) = 3.75/EI, \\ \Delta_{2p} &= 1/EI(1/2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 6) = 4.5/EI, \\ \Delta_{3p} &= 1/EI(1.5/6(2 \cdot 4.5 \cdot 1 + 1 \cdot 6) + 1.5/6(2 \cdot 4.5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4.5 \cdot 1 + 3 \cdot 1) + \\ &\quad + 3/6 \cdot 4 \cdot 4.5 \cdot 1.5) = 17.625/EI.\end{aligned}$$

Так как жесткость у всех стержней рамы постоянная ($EI = \text{const}$), то, умножая левую и правую части системы уравнений на EI , получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}108 X_1 + 126 X_2 + 117 X_3 + 3.75 &= 0, \\ 126 X_1 + 252 X_2 + 175.5 X_3 + 4.5 &= 0, \\ 117 X_1 + 175.5 X_2 + 162 X_3 + 17.625 &= 0.\end{aligned}$$

Решение системы уравнений определяет силы: $X_1 = 0.387$ (т), $X_2 = 0.241$ (т), $X_3 = -0.649$ (т).

Примечание: если жесткость стержней рамы различная, то необходимо выразить жесткости всех участков в зависимости от жесткости одного из участков, например:

EI_1 – жесткость 1 – го участка,
 EI_2 – жесткость 2 – го участка,
 EI_3 – жесткость 3 – го участка,

кроме этого, дано: $EI_1 = 2EI_2$, $EI_2 = 3EI_3$.

Как правило, жесткости участков выражают через меньшую жесткость:

$$EI_1 = EI.$$

Тогда $EI_2 = 3EI_3 = 3EI$, $EI_1 = 2EI_2 = 6EI$.

Очевидно, при формировании системы уравнений все перемещения (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) можно сократить на EI .

5. Построение эпюры изгибающего момента.

Эпюра изгибающего момента для заданной схемы рамы построена с использованием зависимости

$$M = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \bar{M}_3 x_3 + M_p.$$

На рис. 2.2 представлены эпюры изгибающего момента.

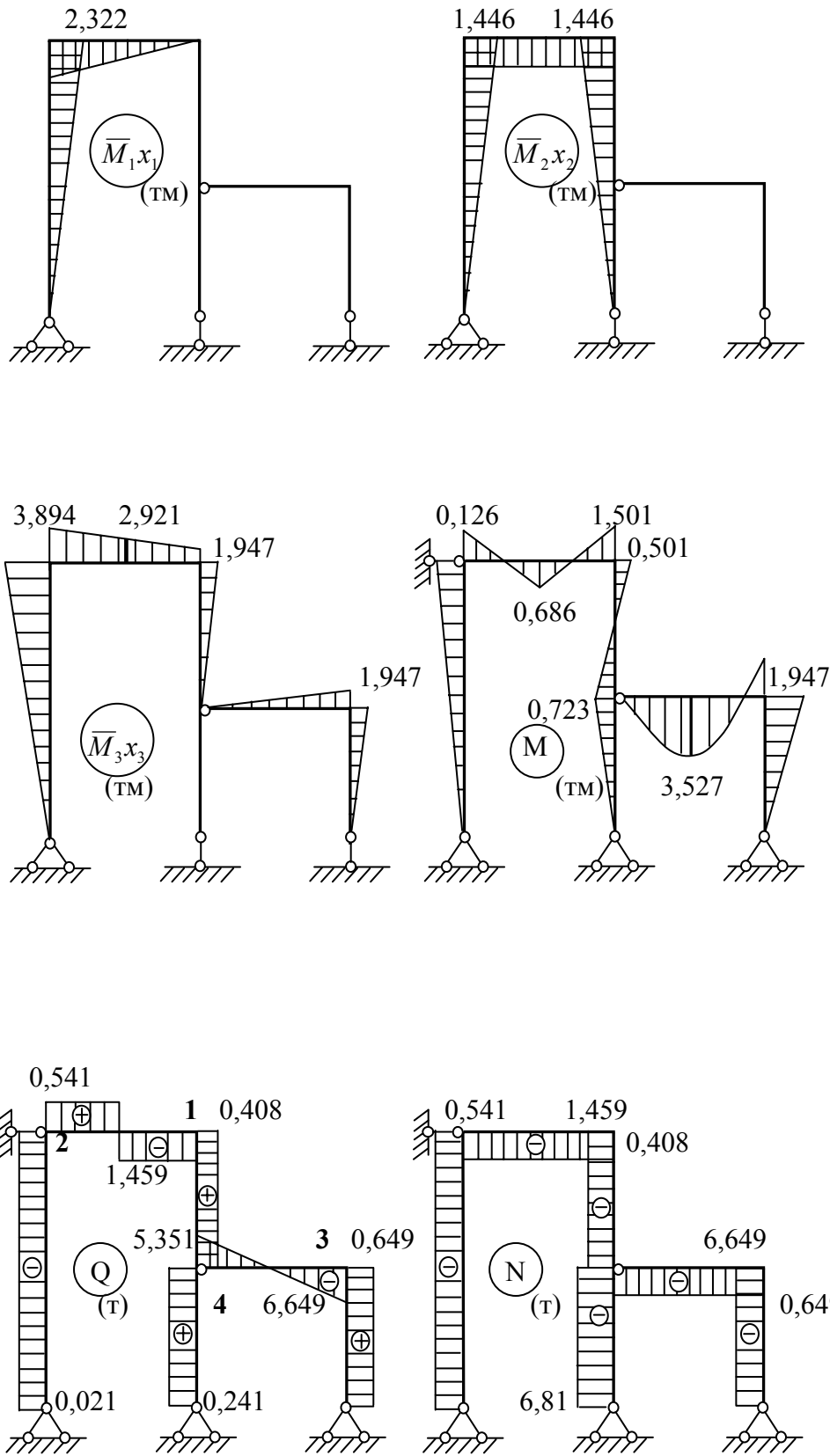


Рис. 2.2. Эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил

6. Построение эпюры поперечной силы.

Эпюра поперечной силы построена по эпюре изгибающего момента с использованием формулы (1.5) и приведена на рис. 2.2.

7. Построение эпюры продольной силы.

В соответствии с нумерацией узлов рамы на эпюре поперечной силы «вырезаны» узлы (Рис. 2.3) и в сечениях приложены действующие поперечные силы. Искомые продольные силы в каждом узле подчеркнуты и определены из уравнений равновесия. По значениям этих сил построена эпюра продольной силы (Рис.2.2).

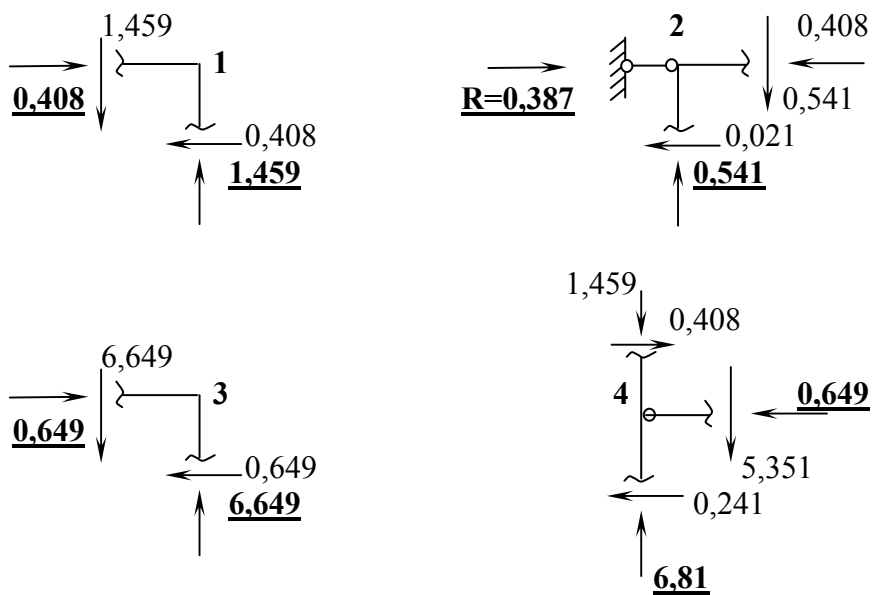


Рис. 2.3. Равновесие узлов рамы

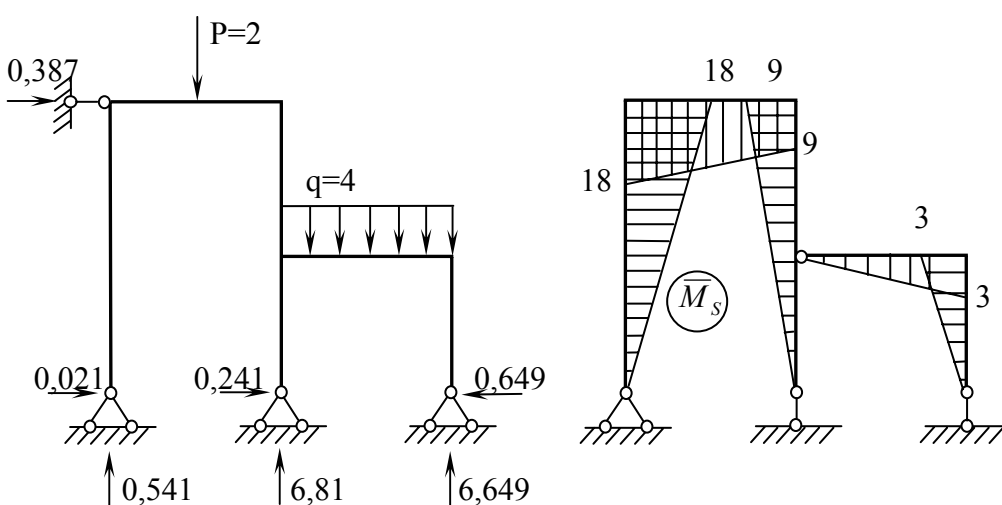


Рис. 2.4. Реакции опор и суммарная эпюра \bar{M}_s

8. Статическая и кинематическая проверки.

Реакции опор расставляются на эпюрах Q и N или на отдельной схеме рамы (Рис. 2.4).

$$\Sigma X = 0,387 + 0,02 + 0,241 - 0,649 = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,541 + 6,81 + 6,649 - 2 - 12 = 0.$$

Суммарная эпюра единичных сил \bar{M}_s представлена на рис. 2.4. Кинематическая проверка:

$$\begin{aligned} \Delta = M \cdot \bar{M}_s = & 1/EI(-1/2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 2/3 \cdot 0.126 + 1.5/6(-2 \cdot 18 \cdot 0.126 + \\ & + 2 \cdot 0.686 \cdot 13.5 - 0.126 \cdot 13.5 + 18 \cdot 0.686) + 1.5/6(2 \cdot 13.5 \cdot 0.686 - \\ & - 2 \cdot 9 \cdot 1.501 - 13.5 \cdot 1.501 + 9 \cdot 0.686) + 3/6(2 \cdot 3 \cdot 0.723 - 2 \cdot 0.501 \cdot \\ & \cdot 9 - 3 \cdot 0.501 + 0.723 \cdot 9) + 1/2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 0.723 - 1/2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot \\ & \cdot 1.947 + 3/6(-3 \cdot 1.947 + 4 \cdot 3.527 \cdot 1.5)) = -16.023 + 16.158 \approx 0. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков. – М.: Высшая школа, 1986. – 733 с.
2. Снитко, Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1992. – 486 с.

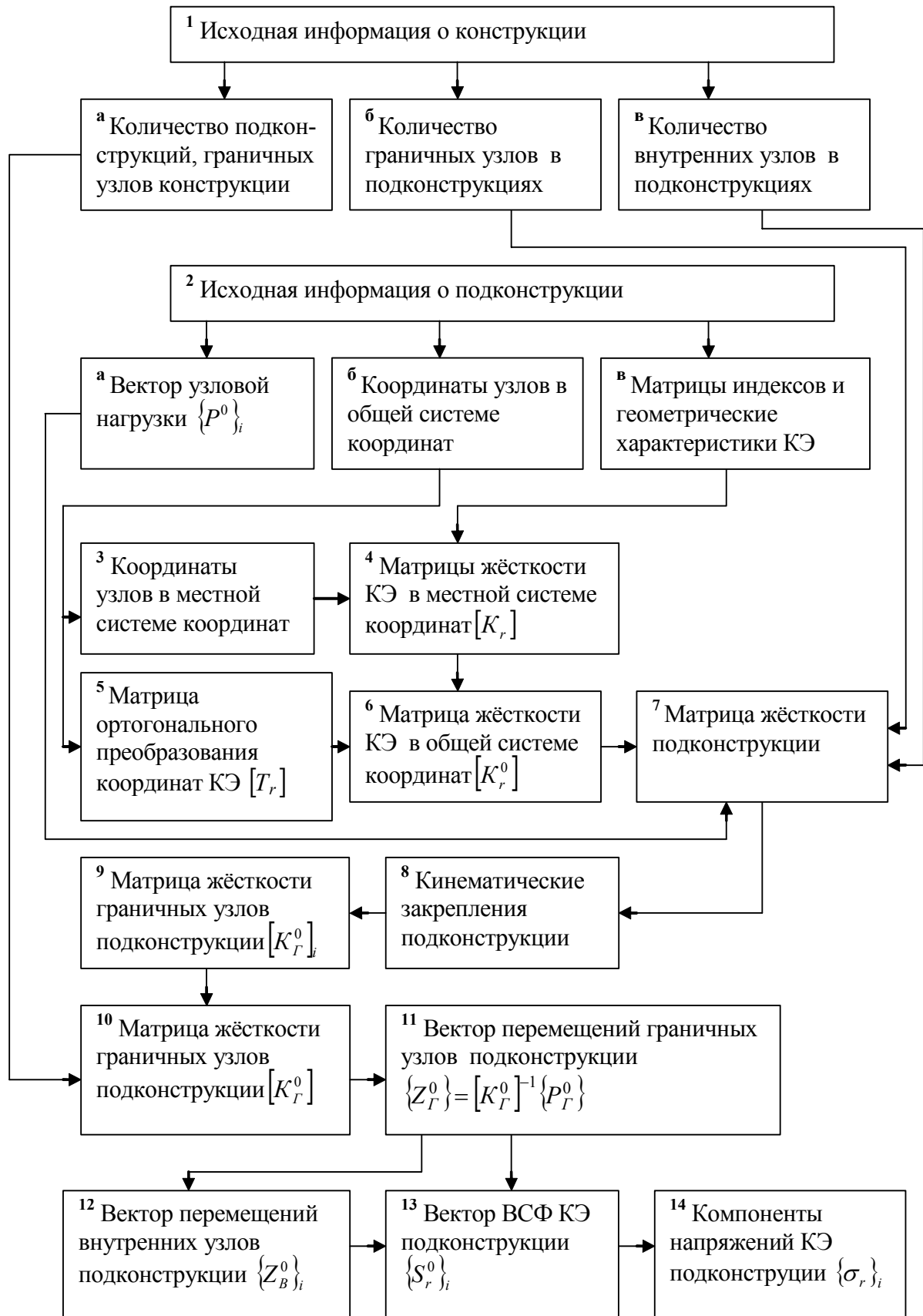


Рис. 3.3. Общая схема алгоритма расчета МКЭ с выделением подконструкций

