МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Е. В. БЕНЬКО

ПРАКТИКУМ

Методические указания по выполнению семинарских, практических занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теория статистики» для студентов 2 курса очной и заочной форм обучения по направлению 08020062 «Менеджмент»

Часть 2

Ульяновск
УлГТУ
2015

УДК 311(076)
ББК 60.6 я 7
Б 46

Рецензент доцент кафедры «Экономика и менеджмент» экономико-математического факультета Ульяновского государственного технического университета, кандидат экономических наук Большухина И. С.

Рекомендовано научно-методической комиссией экономико-математического факультета в качестве методических указаний

Бенько, Е. В.
Б46 Практикум: методические указания по выполнению семинарских, практических занятий и самостоятельной работы студентов. В 2 ч. Ч. 2 / Е. В. Бенько. – Ульяновск : УлГТУ, 2015. – 42 с.

Составлены в соответствии с программой курса «Теория статистики». В методических указаниях приведена структура и краткое содержание практических и семинарских занятий, рассмотрены основные методы анализа социально-экономических явлений, даны вопросы для самостоятельной подготовки студентов.

Предназначены для студентов направления «Менеджмент» профиля «Менеджмент организации».

Работа подготовлена на кафедре «Финансы и кредит».

УДК 311(076)
ББК 60.6 я 7

Тема 1
РЯДЫ ДИНАМИКИ

Изучая эту тему, надо обратить внимание на необходимость сопоставимости уровней ряда, научиться определять различные виды рядов динамики (моментные, интервальные, ряды средних и относительных величин) и рассчитывать для них простейшие показатели: средний уровень, абсолютные приросты, темпы роста и прироста. Очень важно правильно определять средние темпы роста.

Особое внимание следует обратить на обработку динамических рядов с целью выявления закономерностей (тенденций) изменения явлений и сглаживания случайных колебаний.

Основные способы обработки рядов динамики:

1. Укрупнение интервалов и расчет для них средних показателей;
2. Сглаживание уровней способом скользящей (подвижной) средней;
3. Выравнивание по аналитическим формулам.

Суть последнего способа заключается в том, что по эмпирическим данным находят теоретические (вероятностные) уровни, которые рассматриваются как некая функция времени, т. е.

$$\overline{y_t} = f(t).$$

Нахождение параметров той или иной гипотетической функции осуществляется аналогично нахождению параметров уравнений регрессии, описанных в предыдущей теме (только в качестве фактора x выступает фактор времени t).

Так, при выравнивании ряда по прямой для нахождения параметров прямой решается система нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y, \\ a_1 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt \, . \end{cases}$$

При ручной обработке для упрощения счета при выравнивании динамических рядов условное обозначение временных точек (t) можно вести так, чтобы

$$\sum t = 0 \cdot$$

В этом случае системы нормальных уравнений значительно упрощаются. Так, при выравнивании по прямой система будет иметь вид

$$\begin{cases} na_0 = \sum y \Rightarrow a_0 = \dfrac{\sum y}{n} \\ a_1 \sum t^2 = \sum yt \Rightarrow a_1 = \dfrac{\sum yt}{\sum t^2} \, , \end{cases}$$

при выравнивании по параболе второго порядка (если $\sum t = 0$) система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} na_0 + a_2 \sum t^2 = \sum y, \\ a_1 \sum t^2 = \sum yt \\ a_0 \sum t^2 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2 \ . \end{cases}$$

Выравнивание по аналитическим формулам может быть использовано при прогнозировании отдельных показателей путем экстраполяции ряда (нахождения уровней за пределами данного ряда).

Для изучения этой темы необходимо иметь представление об автокорреляции. Ряды, у которых каждый уровень может быть выражен как функция предыдущих, например

$$y_t = f(y_{t-1}),$$

называют *авторегрессионными*, а зависимость между соседними членами именуют *автокорреляцией* и измеряют с помощью коэффициента автокорреляции по формуле

$$r_a = \frac{\overline{y_t y_{t-1}} - \overline{y_t} \cdot \overline{y_{t-1}}}{\sigma_{y_1} \sigma_{y_1 - 1}}$$

или

$$r_a = \frac{\sum y_t y_{t-1} - \dfrac{\sum y_t \sum y_{t-1}}{n}}{\sqrt{\left[\sum (y_t)^2 - \dfrac{\left(\sum y_t\right)^2}{n}\right]\left[\sum (y_{t-1})^2 - \dfrac{\left(\sum y_{t-1}\right)^2}{n}\right]}} \ .$$

Изучение автокорреляции занимает немаловажное место в анализе рядов динамики. В частности, при параллельном рассмотрении рядов динамики измерять корреляцию между ними можно только после проверки каждого ряда на автокорреляцию и исключения ее, если она есть. Исключение автокорреляции в рядах можно обеспечить, коррелируя не сами уровни, а так называемые остаточные величины, получаемые как разность эмпирических и теоретических (выровненных) уровней, т. е.

$$d_x = x - \overline{x_t} \text{ и } d_y = y - \overline{y_t} \ .$$

В этом случае корреляция между остаточными величинами будет определяться по формуле

$$r = \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d_x^2 \sum d_y^2}} \ .$$

В свою очередь, остаточные величины (обозначим их символом ε_t) также должны проверяться на автокорреляцию.

Для этой цели может быть использован коэффициент автокорреляции для остаточных величин

$$r_a = \frac{\sum_{2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{1}^{n} \varepsilon_t^2},$$

а также критерий Дурбина-Ватсона

$$d = \frac{\sum_{2}^{n} (\delta_t - \delta_{t-1})^2}{\sum_{1}^{n} \delta_t^2}.$$

Важное место в анализе рядов динамики занимает изучение сезонных колебаний. Измерение последних осуществляется с помощью, так называемых индексов сезонности, которые могут рассчитываться по-разному. Так, по данным одного года индексы сезонности рассчитываются как процентное отношение помесячных (или квартальных) уровней к среднему уровню за год, т. е.

$$J_{сез} = \frac{y_i}{\bar{y}} 100\%.$$

Для большей надежности сезонность изучается по данным за 3 года. В этом случае для каждого месяца рассчитывается средний уровень за 3 года, который и сопоставляется со средним уровнем за весь период, т. е.

$$J_{сез} = \frac{\overline{y_i}}{\overline{\overline{y_t}}} 100\%.$$

Возможен и другой подход: для каждого года рассчитываются помесячные индексы сезонности,

$$\left(i = \frac{y_i}{\overline{\overline{y}}} \right),$$

а затем для каждого месяца рассчитывается средняя за 3 года, т. е.

$$\overline{J_{сез}} = \frac{\sum i_i}{3}.$$

Чтобы учесть имеющую место тенденцию изменения, рекомендуется производить сглаживание ряда способом скользящей средней или по аналитической функции

$$\left(\overline{y_t} = f(t) \right),$$

а затем находить отношение фактического уровня каждого месяца y_i к выровненному (сглаженному), т. е.

$$J_{сез} = \frac{y_i}{y_t} 100\% .$$

Для учета сезонной волны в практических целях (например, при прогнозировании) из полученных отношений для одноименных месяцев (кварталов) рассчитывается средняя величина (за 2 или 3 года).

Рассмотрим решение некоторых задач по этой теме.

Задача 1.1

Пусть имеются следующие данные о производстве зерна в одном из хозяйств за 5 лет:

Год	2011	2012	2013	2014	2015
Производство зерна, тыс. ц	50	54	62	70	80

Рассчитать:

1) средний уровень за 5 лет;
2) ежегодные абсолютные приросты;
3) ежегодные темпы роста;
4) среднегодовой темп роста за 4 года.

Решение:

А. Так как это интервальный ряд, то средний уровень ряда (среднегодовое производство зерна) определим как среднюю арифметическую простую:

$$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{50+54+62+70+80}{5} = \frac{316}{5} = 63{,}2(\textit{тыс.ц})$$

Б. Ежегодные абсолютные приросты находим как разность между двумя уровнями:

для 2012 г……………54 – 50 = 4 тыс. ц;
для 2013 г……………62 – 54 = 8 тыс. ц;
для 2014 г……………70 – 62 = 8 тыс. ц;
для 2015 г……………80 – 70 = 10 тыс. ц

В. Ежегодные коэффициенты роста находим как отношение уровня каждого года к предыдущему:

для 2012 г………………….... k1= $\frac{54}{50} = 1{,}08$

для 2013 г…………………...k2= $\frac{62}{54} = 1{,}148$

для 2014 г…………………...k3= $\frac{70}{72} = 1{,}129$

для 2015 г…………………...k4= $\frac{80}{70}=1{,}143$

Умножая коэффициенты на 100%, получаем темпы роста.

Г. Среднегодовой темп роста можно рассчитать как среднюю геометрическую из годовых темпов роста:

1) $\overline{T}=\sqrt[n]{T_1T_2T_4...T_n}$ (или $\overline{T}=\sqrt[n]{K_1K_2...K_n}\cdot 100\%$)

либо по формуле:

2) $\overline{T}=\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}}\cdot 100\%$,

которая тождественна первой.

По первой формуле

$$\overline{T}=\sqrt[4]{108\cdot 114{,}8\cdot 112{,}9\cdot ...\cdot 114{,}3}=112{,}5\%.$$

По второй формуле

$$\overline{T}=\sqrt[4]{\frac{80}{50}}\cdot 100\%=\sqrt[4]{1{,}6}\cdot 100\%=112{,}5\%,$$

т. е. среднегодовой темп роста за 4 года (с 2012 по 2015 г.) равен 112,5%.

Расчет среднего темпа (коэффициента) роста по приведенным выше формулам и средней геометрической из цепных отношений

$$\left(\overline{k}=\sqrt[n]{k_1k_2...k_n}\right)$$

и тождественной

$$\overline{k}=\sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}$$

- ориентирован на достижение конечного уровня (y_n) в исследуемом периоде.

Если же ориентация берется на достижение суммарного значения (объема) исследуемого показателя за определенный период, то для расчета среднего коэффициента (темпа) роста используется так называемая средняя параболическая вида

$$\overline{k}+\overline{k}^2+\overline{k}^3+...+\overline{k}^n=\frac{\sum_1^n y_i}{y_o},$$

где значение к определяется по специальной таблице,
на основе отношения

$$\frac{\sum_1^n y_i}{y_o}$$

для соответствующего n (длина периода).

Пример расчета среднего параболического темпа роста приведен ниже.

Задача 1.2

Имеются следующие данные по РФ о вводе в действие жилой площади:

Год	2005	2006-2011
Введено млн кв. м общей площади, у	62,5	394,7

Определить среднегодовой темп роста ввода в действие жилой площади за 2006—2011 гг. (т. е. за 6 лет), ориентированный на достижение общей суммы введенного жилья за указанный период (т. е. 394,7 млн кв. м).

Решение:

Используем формулу средней параболической:

$$\bar{k} + \bar{k}^2 + \bar{k}^3 + \ldots + \bar{k}^n = \frac{\sum_{i}^{n} y_i}{y_o}.$$

В нашем примере $y_0 = 62{,}5$, а $\sum_{1}^{6} y_i = 394{,}7$, т. е. отношение

$$\frac{\sum_{1}^{n} y_i}{y_o} = \frac{394{,}7}{62{,}5} = 6{,}305.$$

По таблице в графе n = 6 находим значение, наиболее близкое к полученному отношению (6,305). Это число 6,323, которому соответствует k = 1,015. Это и есть искомый среднегодовой коэффициент роста ввода жилья за 6 лет (с 2006 по 2011 г.). Итак, среднегодовой темп роста ввода в действие жилой площади за указанный период составлял 101,5%, а среднегодовой темп прироста был равен 101,5 –100= 1,5%.

Задача 1.3

Имеются следующие данные о лесовосстановительных работах в РФ за 2010-2015 гг.:

Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Посадка и посев леса, тыс. га	566	521	447	428	391	367

Рассчитать среднегодовой темп роста (снижения) за 2011 - 2015 гг. лесовосстановительных работ, ориентированный на:

а) достижение фактического уровня в 2015 г.;

б) достижение общей площади посева леса за 2011 - 2015 гг.

Решение:

Если ориентироваться на конечный уровень 2015 г., то:

а) среднегодовой коэффициент изменения лесовосстановительных работ по средней геометрической

$$\bar{k} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_o}} = \sqrt[5]{\frac{367}{566}} = \sqrt[5]{0,6484} = 0,9169 \approx 0,917$$

или 91,7%, т. е. ежегодно объем работ уменьшался в среднем на 8,3%;

б) если при расчете $\bar{k}$ ориентироваться на общий объем работ, произведенных за 5 лет, то надо применить формулу параболической средней:

$$\bar{k} + \bar{k}^1 + \bar{k}^3 + \ldots + \bar{k}^n = \frac{\sum_1^n y_i}{y_o}.$$

Находим

$$\frac{\sum_1^5 y_i}{y_o} = \frac{521 + 447 + 428 + 391 + 367}{566} = 3,805.$$

По таблице в графе n = 5 находим значение k , близкое к 3,805. Это будет 3,801. Ему соответствует (в первой графе) k = 0,91, т. е. среднегодовое снижение посадок при общем объеме работ за 5 лет составило 9%.

Поскольку конечный (последний) уровень ряда может быть случайным (нехарактерным), то представляется, что расчет по второй формуле, где учитывается сумма уровней за n лет, более адекватен.

Задача 1.4

Имеются следующие данные о поголовье коров на молочной ферме колхоза в 2014 г.:

на	1	января 2014 г.	300 голов;
на	1	апреля 2014 г.	330 голов;
на	1	июля 2014 г.	338 голов;
на	1	октября 2014 г.	320 голов;
на	1	января 2015 г.	316 голов.

Определить среднее поголовье коров за год.

Решение:

Так как это моментный ряд, то для нахождения среднего уровня ряда используем формулу средней хронологической вида

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1},$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — уровни ряда; n — число уровней.

В нашем примере

$$\bar{y} = \frac{\frac{300}{2} + 330 + 338 + 320 + \frac{316}{2}}{4} = \frac{1296}{4} = 324 \text{ (головы).}$$

Задача 1.5

Имеются следующие данные, характеризующие динамику производства валового выпуска продукции предприятия по месяцам (графы 1 и 2 таблицы):

Месяц	Валовой выпуск продукции, млн руб.	Скользящая сумма трех членов	Скользящая средняя из трех членов
1	2	3	4
Январь	631	—	—
Февраль	93	258	86
Март	102	312	104
Апрель	117	345	115
Май	126	360	120
Июнь	117	383	128
Июль	140	383	128
Август	126	396	132
Сентябрь	130	399	133
Октябрь	143	408	136
Ноябрь	135	423	141
Декабрь	145	—	—

Требуется произвести сглаживание ряда, применяя трехмесячную скользящую среднюю.

Решение:

Чтобы рассчитать первую скользящую среднюю, находим сумму продукции за январь, февраль, март (графа 3) и делим ее на 3:

$$\frac{63 + 93 + 102}{3} = \frac{258}{3} = 86.$$

Найденную среднюю относим к февралю (т. е. к среднему из трех суммируемых месяцев — графа 4). Для отыскания второй скользящей средней находим сумму продукции за февраль, март, апрель и делим на 3:

$$\frac{93 + 102 + 117}{3} = \frac{312}{3} = 104.$$

Найденную среднюю относим к марту и т. д.

Результаты подсчета скользящих сумм и средних из них показаны в графах 3 и 4 таблицы.

Задача 1.6

Имеются следующие данные о численности населения города за 5 лет (на начало года):

Год	2008	2009	2010	2011	2012
Численность населения, тыс. чел.	72	78	83	87	90

Найти линию тренда и, используя полученное уравнение, определить численность населения в 2015 г. (прогноз).

Решение:

Предположив, что численность населения изменяется во времени по прямой

$$\overline{y_t} = a_0 + a_1 t \ ,$$

для нахождения параметров a_0 и a_1 решаем систему нормальных уравнений, отвечающих требованию способа наименьших квадратов:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

Далее в таблице рассчитаны необходимые для решения системы уравнений суммы: $\sum y, \sum t, \sum t^2, \sum yt.$ Годы последовательно обозначены как 1, 2, 3, 4, 5 (n= 5).

Подставляя полученные суммы в систему уравнений:

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 410 \\ 15a_0 + 55a_1 = 1275, \end{cases}$$

получаем $a_1 = 4{,}5; a_0 = 68{,}5.$

Отсюда искомое уравнение тренда $\overline{y_t} = 68{,}5 + 4{,}5t$. Подставляя в это уравнение значения t 1, 2, 3, 4, 5, находим выровненные (теоретические) значения $\overline{y_t}$ (см. графу 6 таблицы). Для 2015 г. t= 8.

Следовательно, по прогнозу численность населения города в 2015 г. составит

$$68{,}5 + 4{,}5 \cdot 8 = 104{,}5 \text{ (тыс. чел.).}$$

Для решения данной задачи можно использовать и второй способ, упрощенный.

Год	Численность населения, тыс. чел., y_i	Условное обозначение времени, t	t^2	yt	$\overline{y_t} = 68{,}5 + 4{,}5t$
1	2	3	4	5	6
2008	72	1	1	72	73
2009	78	2	4	156	77,5
2010	83	3	9	249	82
2011	87	4	16	348	86,5
2012	90	5	25	450	91
$\sum$	410	15	55	1275	410

Как указывалось выше, если время (t) обозначить так, чтобы $\sum t = 0$ (т. е. счет вести от середины ряда), то система упростится и примет вид

$$\begin{cases} na_0 = \sum y, \\ a_1 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

Каждое уравнение в этом случае решается самостоятельно:

$a_0 = \sum y / n$ и $a_1 = \sum yt / \sum t^2$.

Необходимые для расчета a_0 и a_1 суммы приведены ниже.

Условное обозначение времени, t	Год	Численность населения, тыс. чел., у	t^2	yt	$\overline{y_t} = 82 + 4{,}5t$
1	2	3	4	5	6
-2	2008	72	4	-144	73,0
-1	2009	78	1	-78	77,5
0	2010	83	0	0	82,0
1	2011	87	1	87	86,5
2	2012	90	4	180	91,0
$\sum t = 0$	$n = 5$	$\sum y = 410$	$\sum t^2 = 10$	$\sum yt = 45$	$\sum \overline{y_t} = 410$

Получаем

$5a_0 = 410$; $a_0 = 82$

$10a_1 = 45$; $a_q = 4{,}5$,

отсюда уравнение прямой для выровненных уровней

$\overline{y_t} = 82 + 4{,}5t$ (линия тренда).

Выровненные значения, рассчитанные по последней формуле путем подстановки в нее значений t = –2, –1, 0, 1,2, показаны в графе 6 таблицы.

Численность населения в 2015 г. (t = 5) по формуле будет

$\overline{y_t} = 82 + 4{,}5 \cdot 5 = 104{,}5$ (тыс. чел.).

Естественно, эта величина условная, рассчитанная при предположении, что линейная закономерность изменения численности населения, принятая для 2008—2012 гг., сохранится на последующий период до 2015 г.

Задача 1.7

По данным задачи 1.6 проверим остаточные величины $\left(\varepsilon_1 = y - \overline{y_1}\right)$ на автокорреляцию (считается, что линия тренда (уравнение регрессии) подобрана удачно, если в остаточных величинах отсутствует автокорреляция).

Для этого рассчитаем коэффициент автокорреляции для остаточных величин (r_a) и критерий Дурбина-Ватсона (d). Все необходимые для них расчеты приведены ниже в таблице.

Год	у	$\overline{y_t}$	$y-\overline{y_t}=\varepsilon_t$	ε_{t-1}	$\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}$	ε_t^2	$\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}$	$\left(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}\right)^2$
2008	72	73,0	-1,0	–	–	1,00	–	–
2009	78	77,5	-0,5	-1	-0,5	0,25	1,5	2,25
2010	83	82,0	1,0	0,5	0,5	1,00	0,5	0,25
2011	87	86,5	0,5	1,0	0,5	0,25	-0,5	0,25
2012	90	91	1,0	0,5	-0,5	1,00	-1,5	2,25
$\sum$	410	410	0	–	0	3,5	–	5,0

1. Коэффициент автокорреляции (r_a) для остаточных величин рассчитывается по формуле

$$r_a = \frac{\sum_{2}^{n} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{1}^{n} \varepsilon_t^2}.$$

В нашем примере

$\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} = 0$, а

$\sum \varepsilon_t^2 = 3{,}5$.

Поэтому

$r_a = \frac{0}{3{,}5} = 0$,

что свидетельствует об отсутствии автокорреляции, а следовательно, и о том, что линия тренда подобрана удачно. В том случае, если $r_a \neq 0$, его значение надо сравнить с табличным для данного числа уровней ряда (n) и при заданном уровне значимости ($\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$). Если расчетное значение r_a меньше табличного, то можно говорить об отсутствии автокорреляции в рассматриваемых показателях.

2. Критерий Дурбина-Ватсона (d) рассчитывается по формуле

$$d = \frac{\sum_{2}^{n} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right)^2}{\sum_{1}^{n} \varepsilon_t^2}.$$

В нашем примере $d = \dfrac{5}{3{,}5} = 1{,}43$.

Сравниваем его со значениями d1 и d2 (при v = 1, где v — число переменных в уравнении тренда) для n=15 (таблица не имеет значений d1 и d2 для n < 15). Табличные d1 = 1,08 и d2 = 1,36. Рассчитанное нами d > d2. Следовательно, автокорреляция в остаточных величинах отсутствует.

Рассмотрим несколько способов расчета индексов сезонности.

Задача 1.8

Рассчитать поквартальные индексы сезонности по данным о производстве растительного масла в РФ (тыс. т) за 1992 и 1993 гг.

Кварталы года	Производство масла, тыс. т y_t	Индексы сезонности $J_{сез} = \left(y_t : \bar{y}\right) \times 100\%$	Средние индексы сезонности, % $\overline{J_{сез}}$
1	2	3	4
1992 I	298,8	121,7	123,45
1992 II	228,9	93,2	108,0
1992 III	118,4	48,2	55,2
1992 IV	270,4	110,1	113,3
1993 I	307,3	125,2	123,45
1993 II	301,5	122,8	108,0
1993 III	152,7	62,2	55,2
1993 IV	286,2	116,5	113,3
$\sum$	1964,2	–	–

Решение:

I способ.

1. Рассчитываем средний квартальный уровень производства за 2 года:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1964{,}2}{8} = 245{,}525$$ (тыс. т).

2. Находим отношение уровня каждого квартала к среднеквартальному за 2 года, т. е. индексы сезонности:

$$J_{сез} = \frac{y_i}{\overline{y}} 100\%$$.

Расчет их дан в графе 3.

3. По данным двух лет рассчитываем средний индекс для каждого квартала.

Так, для I квартала

$$\overline{J_{сез}} = \frac{121,7 + 125,2}{2} = 123,4(\%)$$,

для II квартала

$$\overline{J_{сез}} = \frac{93,2 + 122,8}{2} = 108,0(\%)$$ и т. д.

Средние индексы сезонности (квартальные) приведены в графе 4.

II способ. Если в месячных или квартальных показателях заметна тенденция к изменениям (росту или снижению) по годам, то рекомендуется произвести аналитическое выравнивание ряда, а затем индексы сезонности рассчитывать как отношение y_i к выровненным уровням, а не к общей средней.

Применим этот способ к нашему примеру, для чего сначала, выравнив ряд по прямой, рассчитаем теоретические уровни $\overline{y_t}$.

Все расчеты, необходимые для выравнивания ряда, а также расчеты индексов сезонности показаны далее в таблице.

Решение:

1. Для выравнивания примем линейную функцию:

$$\overline{y_t} = a_0 + a_1 t$$.

Параметры a_0 и a_1 определяем из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 8a_0 + 36a_1 = 1964,2 \\ 36a_0 + 204a_1 = 8897,4 \end{cases}$$,

получаем $a_1 = 1,4;\ a_0 = 239,22.$

Отсюда $\overline{y_t} = 239,22 + 1,4t$.

Подставляя в данное уравнение значения t: 1, 2,….8, находим выровненные значения уравнений ряда, т. е. $\overline{y_i}$, (графа 5, с округлением до десятых).

Кварталы t	Производство масла, тыс. т y_i	t^2	$y_i t$	$\overline{y_t}$	$J_{сез} = \frac{y_i}{\overline{y_t}} 100\%$	Средние индексы сезонности, %	Выровненные уровни $\left(\overline{y_t}\right)$ с учетом сезонности
1	2	3	4	5	6	7	8=гр.5×гр.7
I 1	298,8	1	298,8	240,62	124.2	124,5	299,6
II 2	228,9	4	457,8	242,02	94,6	108,2	261,9
III 3	118,4	9	355,2	243,42	48,6	55,0	133,9
IV 4	270,4	16	1081,6	244,82	110,4	112,4	275,2
I 5	307,3	25	1536,5	246,22	124,8	124,5	306,5
II 6	301,5	36	1809,0	247,62	121,8	108,2	267,9
III 7	152,7	49	1068,9	249,02	61,3	55,0	137,0
IV 8	286,2	64	2289,6	250,42	114,3	112,4	281,5
$\sum 36$	1964,2	204	8897,4	1964,2	–	–	1963,5

2. Индексы сезонности (графа 6) рассчитаны как отношение уровня каждого квартала к выровненному за этот же квартал.

3.Так как для двух лет поквартальные индексы сезонности различаются, рассчитываем среднее значение из двухлетних данных (графа 7).

Имея полученные средние квартальные индексы сезонности (графа 7), можно скорректировать выровненные уровни $\left(\overline{y_t}\right)$ с учетом сезонной волны. Для этого каждое значение $\overline{y_t}$ (графа 5) умножаем на средний индекс сезонности соответствующего квартала. Результаты таких расчетов приведены в графе 8.

По такой же схеме, зная уравнение линии тренда и сезонную волну, можно спрогнозировать производство растительного масла по кварталам на следующий год. (В нашем примере на 1994 г.)

Так если $\overline{y_t} = 239{,}22 + 1{,}4t$ и для IV квартала 1993 г. принималось $t = 8$,то для 1994 г. берем t: 9,10,11,12.

Тогда прогноз производства масла для I квартала 1994 г. – $y_{t=9} = (239{,}22 + 1{,}4 \cdot 9) \cdot 1{,}245 = 313{,}5$ (тыс.т)

Для II квартала $y_{t=10} = (239{,}22 + 1{,}4 \cdot 10) \cdot 1{,}082 = 274$ (тыс. т).

Для III квартала $y_{t=11} = (239{,}22 + 1{,}4 \cdot 11) \cdot 0{,}55 = 140$ (тыс.т).

Для IV квартала $y_{t=12} = (239{,}22 + 1{,}4 \cdot 12) \cdot 1{,}124 = 287{,}8$ (тыс.т).

Это один из способов прогнозирования с учетом сезонной волны (мультипликативный). Возможны и другие. Например, аддитивный, когда после нахождения выравненных уровней находится разность между эмпирическими и выравненными уровнями и затем при прогнозировании к значению уровня, полученному по линии тренда, прибавляется среднее значение упомянутых разностей $\left(y-\overline{y_t}\right)$, рассчитанное для отдельных кварталов (или месяцев) за 2 или 3 года.

Рассмотрим задачу на корреляцию рядов динамики.

Задача 1.9

Имеются следующие данные по сельскохозяйственным предприятиям РФ за 5 лет:

Год	Внесено минеральных удобрений под зерновые, кг/га, *x*	Урожайность зерновых, ц/га, *y*
2002	52	17,2
2003	46	16,3
2004	24	14,4
2005	16	11,6
2006	17	12,9

Измерить корреляцию между уровнями двух рядов динамики (x и y), т. е. между урожайностью зерновых и количеством минеральных удобрений, внесенных на 1 га под зерновые.

Решение:

Коррелировать непосредственно уровни двух рядов можно лишь тогда, когда в каждом из них отсутствует автокорреляция, так как наличие последней может существенно повлиять на величину коэффициента, измеряющего зависимость между анализируемыми показателями.

Поэтому, прежде чем применять ту или иную формулу для измерения корреляции между x и y, каждый из этих рядов нужно проверить на автокорреляцию.

1. Проверим на автокорреляцию ряд x_t. Для этого параллельно со значениями x_t запишем x_{t-1}, т. е. сдвинутые на единицу. А чтобы ряд не укорачивался и характеристики этих рядов были одинаковыми ($\overline{y_t}=\overline{y_{t-1}}$ и $\sigma_{y_t}=\sigma_{y_{t-1}}$), последнее значение x_t перенесем в первую строку значений x_{t-1}. Для измерения автокорреляции между уровнями одного ряда используем следующую модификацию формулы коэффициента автокорреляции $\left(r_a\right)$:

$$\gamma_a=\frac{\overline{x_t x_{t-1}}-\overline{x}\,\overline{x_{i-1}}}{\sigma_{t_1}\sigma_{t-1}}=\frac{\overline{x_t x_{t-1}}-\left(\overline{x_t}\right)^2}{\sigma^2{}_{x_t}}=\frac{\sum x_t x_{t-1}-n\left(\overline{x_t}\right)^2}{\sum x_t{}^2-n\left(\overline{x_t}\right)^2}.$$

x_t	x_{t-1}	x_t^2	$x_t x_{t-1}$
52	(17)	2704	884
46	52	2116	2392
24	46	576	1104
16	24	256	384
17	16	289	272
$\sum$155	155	5941	5036

Необходимые суммы рассчитаны ниже в таблице:

y_t	y_{t-1}	y_t^2	$y_t y_{t-1}$
17,2	(12,9)	295,84	221,88
16,3	17,2	265,69	280,36
14,4	16,3	207,36	234,72
11,6	14,4	134,56	167,04
12,9	11,6	166,41	149,64
$\sum$72,4	74,4	1069,86	1053,64

$$\overline{x_t} = \frac{155}{5} = 31$$
.

Находим r_a (расчетное):

$$r_{a\ расч} = \frac{5036 - 5\cdot(31)^2}{5941 - 5\cdot(31)^2} = \frac{5036-4805}{5941-4805} = \frac{231}{1136} = 0{,}203.$$

По таблице находим, что для n=5 и 5%-м уровне значимости ($\alpha = 0{,}05$) табличное значение r_a = 0,253. Так как $r_{a\ расч} < r_{a\ табл}$ то делаем вывод об отсутствии автокорреляции в ряду x_t.

2.Проверим на автокорреляцию ряд y_t.

В этом случае

$$\overline{y_t} = \frac{72{,}4}{5} = 14{,}48$$
,

$$r_a = \frac{\sum y_t y_{t-1} - n\left(\overline{y_t}\right)^2}{\sum y_t^2 - n\left(\overline{y_t}\right)^2} = \frac{1053{,}64 - 5\cdot(14{,}48)^2}{1069{,}86 - 5\cdot(14{,}48)^2} = 0{,}246.$$

Так как и в этом случае $r_{a\ расч} < r_{a\ табл}$, то это свидетельствует об отсутствии автокорреляции в ряду y_t. Следовательно, приведенные в начале задачи ряды динамики (их уровни) можно коррелировать, используя для этой цели обычный линейный коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Выпишем все имеющиеся значения и рассчитаем недостающие:

$\bar{x} = 31$, $\bar{y} = 14{,}48$,

$$\sigma_x^2 = \bar{x}^2 - \left(\bar{x}^2\right) = \frac{5941}{5} - (31)^2 = 227{,}2,$$

$$\sigma_2^y = \bar{y}^2 - \left(\bar{y}^2\right) = \frac{1069{,}86}{5} - (14{,}48)^2 = 4{,}3,$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{52 \cdot 17{,}2 + 46 \cdot 16{,}3 + 24 \cdot 14{,}4 + 16 \cdot 11{,}6 + 17 \cdot 12{,}9}{5} = \frac{2394{,}7}{5} = 478{,}94.$$

Следовательно,

$$\gamma_{xy} = \frac{\overline{x_t y} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{487 \cdot 94 - 31 \cdot 14{,}48}{\sqrt{227{,}2 \cdot 4{,}3}} = 0{,}96,$$

т. е. зависимость между вариацией количества вносимых минеральных удобрений и вариацией урожайности зерновых в 2002-2006 гг. была очень большой.

Контрольные вопросы

1. Что такое ряды динамики и какова их роль в статистическом анализе?
2. Как решается вопрос о сопоставимости уровней динамического ряда?
3. Какие существуют виды динамических рядов?
4. Как исчисляется средний уровень для различных рядов?
5. Какие основные показатели рассчитываются для анализа динамических рядов?
6. Как рассчитывается средний темп роста?
7. Чем вызывается необходимость обработки динамических рядов?
8. Какие существуют способы обработки динамических рядов?
9. Как измеряются сезонные колебания в динамических рядах?
10. Определите понятие автокорреляции в рядах динамики. Как она измеряется?
11. В чем состоят особенности корреляции рядов динамики?

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Задача 1

Имеются следующие данные о производстве картофеля в хозяйствах населения РФ за 2008-2013гг.:

Год	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Производство картофеля, млн т	24,8	29,9	31,1	29,8	35,9	34,9

Определить:

1) абсолютные приросты производства картофеля по годам (цепные);
2) цепный и базисные коэффициенты роста;
3) среднегодовой уровень производства картофеля за 2008-2013 гг.;
4) среднегодовой коэффициент роста производства картофеля в хозяйствах населения за 2009-2013 гг.

Ответ: 3) $\bar{y}$=30,07 млн т; 4) $\bar{k}$=1,0707, или $\approx$ 107,1%.

Задача 2

Имеются следующие данные об остатках наличных денег у населения РФ в первой половине 2013 г.:

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Остаток денег на начало месяца, трлн руб.	75,8	70,5	74,5	77,1	84,7	88,4	100,5

Рассчитать:

1) средний остаток наличных денег у населения за январь-июнь;
2) среднемесячный темп роста наличных денег у населения за 6 месяцев 2013 г.

Ответ: 1) $\bar{y}$=80,6 трлн руб. 2) $\bar{k}$=1,048, или 104,8%.

Задача 3

Имеются следующие данные по РФ о вводе в действие жилых домов, построенных населением за свой счет и с помощью кредитов:

Год	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Введено млн кв. м общей площади	6,0	5,4	4,9	5,6	7,1	9,0	10

Определить за 2009-2014 гг. среднегодовой коэффициент роста строительства жилья населением РФ, ориентированный на достижение:

а) конечного уровня 2014 г.;

б) общей площади, построенной за 2009-2014 гг.

Ответ: а) $\overline{K} = 1{,}089,$ или 108,9%;

б) $\overline{K} = 1{,}045,$ или 104,5%.

Задача 4

Имеются следующие данные об остатках вкладов населения в банках РФ в первой половине 2013 г.:

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Остаток денег на начало месяца, млрд руб.	127,6	129,7	132,7	133,8	135,3	137,1	139,8

Определить:

а) средний остаток вкладов населения в банках РФ за 6 месяцев 2013 г.;

б) среднемесячный темп прироста вкладов.

Ответ: а) $\overline{y} = 133{,}7$ млрд руб.;

б) $\overline{T_{прироста}} = \overline{T_{роста}} - 100\% = 101{,}5 - 100\% = 1{,}5\%$.

Задача 5

Произвести аналитическое выравнивание ряда динамики о производстве картофеля в хозяйствах населения РФ за 2010-2014 гг.

Год	2010	2011	2012	2013	2014
Производство картофеля, млн. т	29,2	31,1	29,8	35,9	34,9

Ответ: уравнение тренда $\hat{y}_t = 27{,}32 + 1{,}62t$.

Задача 6

По данным предыдущей задачи спрогнозировать производство картофеля в хозяйствах населения в 2016 г.

Ответ: 38,66 млн т.

Задача 7

По результатам решения задачи 5 найти остаточные величины $(y_t - \hat{y}_t = \varepsilon_t)$ и проверить их на автокорреляцию с помощью коэффициента автокорреляции Андерсона и критерия Дурбина-Ватсона.

Задача 8

Имеются следующие данные об урожайности зерновых в одном из регионов:

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Урожайность, ц/га	17,0	14,4	19,7	23,0	22,1	23,8

1) Проверить ряд на автокорреляцию.
2) Произвести аналитическое выравнивание ряда.
3) Рассчитать теоретические значения урожайности, а также остаточную дисперсию.
4) С помощью критерия Дурбина-Ватсона проверить остаточные величины на автокорреляцию.
5) Рассчитать среднегодовой темп роста урожайности зерновых за 2010-2014 гг.

Задача 9

Имеются следующие данные по сельскохозяйственным предприятиям РФ об урожайности зерновых культур и обеспеченности зерноуборочными комбайнами в 2009-2014 гг.:

Год	Количество комбайнов на 1000 га, *x*	Урожайность зерновых, ц/га, у
2009	6,5	14,4
2010	6,2	17,2
2011	6,2	16,3
2012	6,1	14,4
2013	5,8	11,6
2014	5,4	12,9

1) Проверить каждый ряд на автокорреляцию.
2) Провести аналитическое выравнивание каждого ряда и найти остаточные величины $dx = x - \hat{x}_t$ и $dy = y - \hat{y}_t$.
3) Измерить корреляцию между уровнями двух рядов.
4) Измерить корреляцию между остаточными величинами двух рядов.
5) Сравнить результаты, полученные в пп. 3 и 4, и сделать выводы о связи между *x* и *y*.

Задача 10

Имеются следующие данные по РФ:

Год	Число клубных учреждений, тыс., x	Зарегистрировано преступлений на 1000 чел., y
2009	73,2	12,4
2010	70,6	14,6
2011	66,0	18,6
2012	63,7	18,8
2013	61,3	17,7
2014	59,9	18,6

Измерить корреляцию между указанными показателями на основе корреляции первых разностей уровней в ряду x и y:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} \text{ и } \Delta y = y_i - y_{i-1}.$$

Задача 11

Имеются следующие данные о вводе в действие жилых домов (млн кв. м общей площади) в Москве:

Год	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Введено млн кв. м общей площади	2,26	2,47	2,48	2,28	2,47	2,55

1. Рассчитать среднегодовой темп роста ввода в действие жилых домов в Москве, ориентированный на достижение:
   1) фактического уровня в 2014 г.;
   2) общего объема жилья, введенного в действие за 2010 - 2014 гг.
2. Найти уравнение тренда и спрогнозировать ввод жилья в Москве в 2017 г.
3. Проверить параметры уравнения на значимость.
4. Проверить остаточные величины на автокорреляцию.

Тема 2
ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Приступая к изучению темы, следует прежде всего отчетливо представлять, что индексы — это относительные показатели, характеризующие соотношение явлений во времени, в пространстве и по сравнению с планом. Индексы делятся на индивидуальные и общие.

Общие индексы могут быть построены как агрегатные или как средние из индивидуальных.

Построение агрегатных индексов сводится к тому, что с помощью определенных соизмерителей выражаются итоговые величины сложной совокупности в отчетном и базисном периодах, а затем первая сопоставляется со второй. Например, нужно показать изменение объема выпускаемой продукции на мебельной фабрике в 1998 г. (отчетный период) по сравнению с 1997 г. (базисный период). Фабрика выпускает столы, шкафы, диваны. Ясно, что сложить эту различную несоизмеримую продукцию в физических единицах нельзя. Но если представить всю продукцию в стоимостном выражении (приняв цены в качестве соизмерителя), то тогда можно сравнивать стоимость продукции одного года со стоимостью продукции другого года. А чтобы изменение цен не влияло на величину стоимостного показателя, продукцию двух лет надо оценить в одних и тех же ценах. Если выпуск продукции условно обозначить через q, а цены — через p, то формула агрегатного индекса физического объема выразится следующим образом:

$$I_{ф.об} = \frac{\sum q_i p}{\sum q_o p} \qquad \text{или} \qquad I_{ф.об} = \frac{\sum q_i p_o}{\sum q_o p_o},$$

где q_1 и q_0 — количество продукции соответственно в отчетном и базисном периодах; p и p_0 — цены соответственно сопоставимые и базисного периода.

Аналогично для построения агрегатного индекса цен определенный набор продуктов (q) оценивается в ценах двух периодов и сопоставляются стоимости набора в разных ценах. При этом количество этого набора (q) может приниматься на уровне базисного периода (q_0) или отчетного (q_1).

В первом случае индекс цен именуется *индексом Ласпейреса* (по имени немецкого ученого, предложившего этот метод) и записывается в виде формулы

$$I_{ценЛаспейреса} = \frac{\sum q_o p_1}{\sum q_o p_o}.$$

Если же принимается продукция в объеме (количестве) отчетного периода (q_1), то индекс цен носит имя своего автора — *индекс Пааше,* и записывается

$$I_{ценПааше} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}.$$

Общий индекс может быть построен и как средний взвешенный из индивидуальных. При этом надо помнить, что веса для индивидуальных индексов должны быть подобраны так, чтобы было обеспечено тождество среднего арифметического или гармонического индекса агрегатному.

Так, для индекса физического объема средний арифметический индекс будет иметь вид

$$I \ = \frac{\sum iq_0 p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

где $I = \dfrac{q_1}{q_0}$ — индивидуальные индексы объема;

$q_0 p_0$ — стоимость продукции базисного периода в базисных ценах.

Нетрудно заметить, что этот индекс тождествен агрегатному:

$$\frac{\sum \frac{q_1}{q_0} q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

Поскольку агрегатные индексы цен могут быть построены по формуле Ласпейреса или Пааше, то и средние из индивидуальных строятся, соответственно, по-разному. Так, средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса, исчисляется по формуле

$$I_{ар.(Л)} = \frac{\sum iq_0 p_0}{\sum q_0 p_0},$$

где $I = \dfrac{p_1}{p_0}$ — индивидуальные индексы цен, а $q_0 p_0$ — веса.

А средний арифметический индекс цен, тождественный агрегатному индексу Пааше,

$$I_{ар.(П)} = \frac{\sum iq_1 p_0}{\sum q_1 p_0},$$

т. е. веса здесь иные ($q_1 p_0$).

Соответственно, разную форму будут иметь и средние гармонические индексы цен.

Тождественный индексу Ласпейреса

$$I_{гар.(Л)} = \frac{\sum q_0 p_{1_1}}{\sum \frac{q_0 \ p_1}{i}},$$

а тождественный индексу Пааше

$$I_{гар.(П)} = \frac{\sum q_1 p_{1_1}}{\sum \frac{q_1\ p_1}{i}}.$$

На практике всегда оговаривается, по какой методике рассчитывается тот или иной индекс цен.

Надо иметь в виду, что для средних индексов в качестве весов могут приниматься не только абсолютные показатели стоимости продукции (например, $q_0 p_0$ или $q_1 p_1$), но и относительные величины в виде долей или процентов отдельных групп товаров в структуре производства, потребления, товарооборота и пр.

Следует также обратить внимание на то, что если строится ряд индексов, то они могут быть построены или как цепные (ряд индексов, каждый из которых построен по отношению к предыдущему периоду), или как базисные (ряд индексов, построенных в сравнении с одной и той же базой). Произведение цепных индексов дает базисный индекс. Путем деления двух базисных индексов легко получить цепной.

Особое место в статистике занимают так называемые индексы переменного и фиксированного состава, используемые при анализе динамики средних показателей.

Индексом переменного состава ($I_{п.с.}$) бывают отношение двух средних уровней.

Если индексируемую величину обозначить через *x,* а веса через *f,* то в общем виде индекс переменного состава можно записать как

$$I_{п.с.} = x_1 : x_0 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}.$$

Очевидно, что средняя величина показателя ($\bar{x}$) может меняться как за счет изменения значений осредняемого признака (*x*) у отдельных единиц, так и за счет изменения их весов (*f*), т.е. за счет изменения состава (структуры) совокупности. Это и является основанием для именования данного отношения средних величин индексом переменного состава.

Если при расчете средних величин за два периода зафиксировать веса одного и того же периода, то при сравнении таких средних влияние изменения структурного фактора будет устранено, и этот индекс называют *индексом фиксированного (или постоянного) состава (Iф.с.)*. Веса при этом фиксируются, как правило, на уровне текущего периода (f_1), т. е.

$$I_{ф.с.} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1}.$$

Нетрудно заметить, что при сокращении на $\sum f_1$ этот индекс можно записать как

$$I_{ф.с.} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1},$$

т. е. в агрегатном виде.

Индекс фиксированного состава характеризует изменение только самого осредняемого признака при постоянстве структуры совокупности.

При сравнении средних показателей можно принять неизменными значения f, тогда на динамику средних будет оказывать влияние только изменение весов, т. е. структуры совокупности. Этот индекс условно называют *индексом структуры (или индексом структурных сдвигов) (Iстр.)*:

$$I_{стр.} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0}$$

или

$$I_{стр.} = \frac{I_{п.с.}}{I_{ф.с.}},$$

т. е. индекс структуры можно получить, разделив индекс переменного состава на индекс фиксированного состава.

Индекс структуры показывает, в какой степени изменение средней величины индексируемого показателя произошло за счет изменения структуры (состава) совокупности.

Записанные выше в общем виде формулы индексов переменного и фиксированного состава, а также индекс структуры принимают тот или иной конкретный вид в зависимости от символики, используемой для отдельных показателей. Так, при изучении динамики средней урожайности зерновых, если обозначить урожайность отдельных культур через *у*, а посевную площадь под ними через *П*, индекс урожайности переменного состава будет иметь вид

$$I_{ур.п.с.} = у_1 : у_0 = \frac{\sum у_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum у_0 П_0}{\sum П_0},$$

индекс урожайности фиксированного состава —

$$I_{ур.ф.с.} = \frac{\sum у_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum у_0 П_1}{\sum П_1}.$$

И индекс структуры —

$$I_{ур.стр.} = \frac{\sum у_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum у_0 П_0}{\sum П_0}$$

или $I_{ур.стр.} = I_{ур.п.с.} : I_{ур.ф.с.}$

Далее при решении задач будут приведены формулы индексов и для других показателей.

При изучении различных взаимосвязанных показателей следует иметь в виду, что индексы этих показателей находятся точно в такой же зависимости, как и сами показатели (индивидуальные индексы всегда, общие – при определенном построении). Например, если валовой сбор какой-либо культуры можно представить в виде показателя, зависящего от посевной площади и урожайности (*валовой сбор = урожайность × посевная площадь*), то и индекс валового сбора можно представить в виде произведения индекса посевных площадей на индекс урожайности. На основе такого рода взаимосвязанных индексов, зная два из трех, легко рассчитать третий.

Рассмотрим решение некоторых задач к данной теме.

Задача 2.1

Имеются следующие данные о продаже и ценах на продукты на одном из рынков города:

Продукт	Единица измерения	Продано, тыс. ед.		Цена единицы, руб.	
		в базисном периоде q_0	в отчетном периоде q_1	в базисном периоде p_0	в отчетном периоде p_1
Молоко	л	50	60	3	2,5
Картофель	кг	40	50	2	1,5
Говядина	кг	1,5	2	20	18

Определить:

1. Общее изменение физического объема продаж;
2. Общее изменение цен на указанные продукты;
3. Абсолютную экономию населения от снижения цен.

Решение:

1. Общее (в среднем) изменение объема продаж определим по агрегатной формуле индекса физического объема:

$$I_{ф.об} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{60 \times 3 + 50 \times 2 + 2 \times 20}{50 \times 3 + 40 \times 2 + 1{,}5 \times 20} = 1{,}23 \text{ (или 123\%)},$$

т. е. в отчетном периоде было продано продуктов на 23% больше (123-100 = 23%), чем в базисном периоде.

2. Общий индекс цен, характеризующий среднее изменение цен на все продукты, определяем по формуле Пааше:

$$I_{цен} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0} = \frac{60 \times 2{,}5 + 50 \times 1{,}5 + 2 \times 18}{60 \times 3 + 50 \times 2 + 2 \times 20} = \frac{261}{320} = 0{,}8156 \text{ (или 81,56\%)},$$

т. е. цены на все продукты снизились в среднем на 18,44% (81,56 - 100 = -18,44%).

3. Для ответа на третий вопрос вычтем из числителя агрегатной

формулы индекса цен знаменатель:
$\sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = 261 - 320 = -59$ (тыс. руб.),
т. е. абсолютная экономия у населения от снижения цен составила 59 тыс. руб.

Задача 2.2

Определить среднее снижение цен на швейные изделия в отчетном периоде по сравнению с базисным по следующим данным:

Наименование швейных изделий	Снижение цен в отчетном периоде по сравнению с базисным, %	$I_u = \frac{p_1}{p_0}$	Продано в отчетном периоде, млн руб. $q_1 p_1$
Хлопчатобумажные	- 20	0,80	10
Капроновые	- 15	0,85	17

Решение:

В данном случае общий индекс цен может быть рассчитан из индивидуальных по формуле среднего гармонического индекса, тождественного агрегатному индексу Пааше:

$$I_{гар.(П)} = \frac{\sum q_1 p_{1_1}}{\sum \frac{q_1\ p_1}{i}} = \frac{10+17}{\frac{10}{0,8}+\frac{17}{0,85}} = \frac{27}{12,5+20} = \frac{27}{32,5} = 0,83$$ (или 0,83%),

т. е. цены в среднем снизились на 17% (83 –100= –17%).

Задача 2.3

Имеются следующие данные о выпуске продукции мебельной фабрики:

Наименование изделий	Изменение выпуска в мае по сравнению с апрелем, %	Выпуск продукции в апреле, млн руб., $q_0 p_0$
Столы	+ 12	20
Диваны	+ 10	50
Стулья	+ 15	30

Определить увеличение выпуска всей продукции в мае по сравнению с апрелем (в %), т. е. рассчитать общий индекс физического объема.

Решение:

Общий индекс физического объема может быть рассчитан как средний арифметический:

$$I_{ар.(Л)} = \frac{\sum iq_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{1{,}12 \times 20 + 1{,}1 \times 50 + 1{,}15 \times 30}{20 + 50 + 30} = 1{,}119 \text{ (или 111,9\%)},$$

т. е. в целом по предприятию выпуск продукции в мае по сравнению с апрелем увеличен на 11,9%.

Задача 2.4

Имеются следующие данные о динамике потребительских цен в РФ за 2014 г.:

Группа товаров	Индекс потребительских цен (2014 г. по отн. к 2013 г.), в разах i	Структура потребительских расходов в 2013 г. (по данным обследований семейных бюджетов), % d_0
Продовольственные товары	3,1	49,4
Непродовольственные товары	2,9	43,1
Платные услуги	7,6	7,5

Рассчитать сводный (общий) индекс потребительских цен.

Решение:

Находим общий индекс потребительских цен как средний арифметический из групповых, приняв в качестве весов долю отдельных товаров (в %) в общих расходах за 2013г., т. е. по формуле, тождественной агрегатному индексу цен Ласпейреса:

$$I_{ар.(Л)} = \frac{\sum iq_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{3{,}1 \times 49{,}4 + 2{,}9 \times 43{,}1 + 7{,}5 \times 7{,}5}{100} = 3{,}35 \text{ раза},$$

т. е. в целом индекс потребительских цен составил 3,35 раза (рост в 3,35 раза).

Задача 2.5

Имеются следующие данные об изменении численности рабочих на заводе, в % к предыдущему году:

2011	2012	2013	2014	2015
+5	+4	+7	+5	+6

Определить, на сколько процентов увеличилось число рабочих на заводе за 5 лет, т. е. в 2015 г. по сравнению с 2010 г.

Решение:

Зная, что базисный индекс можно получить путем перемножения цепных, находим:

$$I_{\frac{2015}{2010}} = 1{,}05 \times 1{,}04 \times 1{,}07 \times 1{,}05 \times 1{,}06 = 1{,}30 \text{ (или 130\%)},$$

т. е. за 5 лет число рабочих на заводе возросло на 30%.

Задача 2.6

Имеются следующие данные о производстве и себестоимости продукта А по двум фабрикам за два периода:

Фабрика	Произведено, тыс. ед.		Себестоимость единицы продукта, руб.	
	в базисном периоде q_0	в отчетном периоде q_1	в базисном периоде c_0	в отчетном периоде c_1
№1	50	80	150	135
№2	60	40	250	230
$\sum$	110	120	-	-

Определить:

1) изменение себестоимости продукта А по каждой фабрике;

2) изменение себестоимости в целом по обеим фабрикам с помощью индексов переменного и фиксированного составов;

3) индекс структуры.

Решение:

1. Изменение себестоимости единицы продукта А по каждой фабрике определяем с помощью индивидуальных индексов:

а) по фабрике №1: i1, = 135 : 150 = 0,9 (или 90%), т. е. себестоимость снизилась на 10%;

б) по фабрике №2: i2 = 230 : 250 = 0,92 (или 92%), т. е. себестоимость снизилась на 8%.

2. Общий индекс себестоимости в данном случае может быть рассчитан как индекс переменного состава (сравнение средней себестоимости по двум фабрикам за два периода) и как индекс фиксированного состава (характеризует среднее изменение себестоимости продукта А по двум фабрикам без учета влияния структурного фактора).

Чтобы рассчитать индекс себестоимости переменного состава, определяем среднюю по двум фабрикам себестоимость продукта А в отчетном и базисном периодах, а затем их сопоставляем. Средняя себестоимость в отчетном периоде ($\bar{c}_1$):

$$\bar{c}_1 = \frac{\sum c_1 q_1}{\sum q_1} = \frac{135 \times 80 + 230 \times 40}{80 + 40} = 166{,}7 \text{ (руб.)}.$$

Средняя себестоимость в базисном периоде ($\bar{c}_0$)

$$\overline{c_0} = \frac{\sum c_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{150 \times 50 + 250 \times 60}{50 + 60} = 204{,}5 \text{ (руб.).}$$

Тогда индекс себестоимости переменного состава:

$$I_{c/_{cm}\ п.с.} = c_1 : c_0 = \frac{\sum c_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum c_0 q_0}{\sum q_0} = 166{,}7 : 204{,}5 = 0{,}815 \text{ (или 81,5\%),}$$

т. е. средняя по двум фабрикам себестоимость продукта А снизилась на 18,5%. Очевидно, что это снижение произошло не только за счет снижения себестоимости на каждой фабрике, но и за счет влияния структурного фактора увеличения выпуска более дешевого продукта на фабрике №1.

Для устранения влияния структурного фактора рассчитываем индекс себестоимости фиксированного состава (I с/ст. ф.с.):

$$I_{c/_{cm}\ ф.с.} = \frac{\sum c_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum c_0 q_1}{\sum q_1} = \frac{135 \times 80 + 230 \times 40}{120} : \frac{150 \times 80 + 250 \times 40}{120} = 0{,}909$$

(или 90,9%),

$$I_{c/_{cm}\ ф.с.} = \frac{\sum c_1 q_1}{\sum c_0 q_1} = \frac{135 \times 80 + 230 \times 40}{150 \times 80 + 250 \times 40} = \frac{20000}{22000} = 0{,}909 \text{ (или 90,9\%),}$$

т. е. себестоимость продукта А в среднем по двум фабрикам снизилась на 9,1%.

Этот же результат получим, сократив обе дроби на $\sum q_1$, т. е. применив формулу агрегатного индекса себестоимости.

3. Индекс структуры (I_{cmp}) получим, разделив индекс себестоимости переменного состава на индекс фиксированного состава:

$I_{cmp} = I_{п.с.} : I_{ф.с.} = 0{,}815 : 0{,}909 = 0{,}896$ (или 89,6%).

Этот индекс показывает, как изменилась средняя себестоимость продукта А за счет структурного фактора, т. е. средняя себестоимость продукта А снизилась на 10,4% (89,6 – 100) за счет увеличения выпуска (доли) продукта А на фабрике №1.

Индекс структуры (или структурных сдвигов) можно рассчитать и самостоятельно по формуле

$$I_{c/_{cm}\ cmp.} = \frac{\sum c_{01} q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum c_0 q_0}{\sum q_0} = 183{,}3 : 204{,}5 = 0{,}896 \text{ или (89,6\%).}$$

Рассмотрим задачу на индексы урожайности.

Задача 2.7

Имеются следующие данные по РФ об урожайности и посевных площадях озимых зерновых культур в 2011 и 2015 гг. (первые пять граф таблицы).

Определить:

1. Общий индекс урожайности озимых зерновых культур:

а) переменного состава;

б) фиксированного состава.

2. Индекс структурных сдвигов.

Культура	Урожайность, ц/га		Посевная площадь, млн га		Валовый сбор, млн ц		$y_0 П_1$
	2011 (y_0)	2015 (y_1)	2011 ($П_0$)	2015 ($П_1$)	2011 ($y_0 П_0$)	2015 ($y_1 П_1$)	
Пшеница	28,1	16,9	9,2	8,2	258,52	138,58	230,42
Рожь	16,4	12,6	6,5	3,2	106,60	40,32	52,48
Ячмень	35,1	28,3	0,78	0,47	27,38	13,30	16,50
	-	-	16,48	11,87	392,50	192,20	299,40

Решение:

1. Определяем индекс урожайности переменного состава по формуле

$$I_{ур.п.с.} = \frac{\sum y_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum y_0 П_0}{\sum П_0} = y_1 : y_0,$$

т. е. как отношение средней урожайности зерновых в 2011 к средней урожайности в 2015 г. Все необходимые данные приведены в таблице. Подставляя их в формулу, получаем:

$$I_{ур.п.с.} = \frac{192,2}{11,87} : \frac{392,5}{16,48} = 16,2 : 23,8 = 0,68, \text{ или } 68\%,$$

т. е. средняя урожайность зерновых (озимых) снизилось за указанный период на 32%, или на 7,6 ц/га (16,2 – 23,8 = –7,6).

2. Находим индекс урожайности фиксированного состава, устраняющего влияние изменения структуры посевных площадей на динамику средней урожайности:

$$\text{А) } I_{ур.ф.с.} = \frac{\sum y_1 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum y_0 П_1}{\sum П_1}, \text{ или Б) } I_{ур.ф.с.} = \frac{\sum y_1 П_1}{\sum y_0 П_1},$$

где $\sum y_0 П_1$— валовой сбор, который был бы получен с площади 2015 г. при урожайности 2011 г. (последняя графа таблицы). Подставляя все значения в формулу «А», получаем:

$$I_{ур.ф.с.} = \frac{192,2}{11,87} : \frac{299,4}{11,87} = 16,2 : 25,2 = 0,64, \text{ или } 64\%.$$

Это означает, что за счет изменения урожайности отдельных культур средняя урожайность зерновых снизилась на 36%, или на 9 ц/га (16,2–25,2 = –9).

Этот же относительный результат получим и по формуле «Б»:

$$I_{ур.ф.с.} = \frac{\sum y_1 П_1}{\sum y_0 П_1} = \frac{192,2}{299,4} = 0,64.$$

Однако, пользуясь этой формулой, нельзя показать изменение средней урожайности зерновых в абсолютном выражении.

3. Находим индекс структуры, отражающий влияние изменения структуры посевных площадей на динамику средней урожайности зерновых, по двум формулам:

а) $I_{стр} = I_{п.с.} : I_{ф.с.} = 0,68 : 0,64 = 1,06$

или

б) $I_{стр.} = \frac{\sum y_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum y_0 П_0}{\sum П_0} = 25,2 : 23,8 = 1,06,$ или 106%.

Это означает, что средняя урожайность зерновых возросла на 6% или на 1,4 ц/га (25,2 – 23,8 = 1,4) за счет изменения структуры посевных площадей, в частности за счет увеличения в 2015 г. доли посева пшеницы и ячменя и уменьшения доли посева ржи (менее урожайной).

Таким образом, общее снижение средней урожайности (–7,6 ц/га) обусловлено двумя факторами: снижением урожайности отдельных культур и изменением структуры посевных площадей, т. е. –7,6 = –9 + 1,4.

Задача 2.8

По данным задачи 2.7 определить абсолютное изменение валового сбора озимых зерновых культур в 2015 г. по сравнению с 2011 г. и разложить его по факторам, т. е. показать, какая часть этого прироста (убыли) получена за счет изменения:

1) размера посевных площадей;
2) урожайности отдельных культур;
3) структуры посевных площадей.

Решение:

Определяем в абсолютном выражении изменение валового сбора озимых зерновых ($\Delta_{в.сб.}$) в 2015 г. по сравнению с 2011 г.:

$$\Delta_{в.сб} = \sum y_1 П_1 - \sum y_0 П_0 = 192,2 - 392,5 = -200,3 \text{ (млн ц)},$$

т. е. имело место уменьшение валового сбора на 200,3 млн ц, в том числе:

1) за счет изменения размера посевных площадей (находим разность их сумм и умножаем на величину средней урожайности 2011 г.:

$$\Delta_{в.сб}(\sum П) = (\sum П_1 - \sum П_0) y_0 = (11,87 - 16,48) \times 23,8 = -109,7 \text{ (млн ц)};$$

2) за счет изменения урожайности отдельных культур (эту величину легко получить как разность между числителем и знаменателем индекса урожайности фиксированного состава в агрегатном виде):

$\Delta_{в.сб(y)} = (\sum y_1 П_1 - \sum y_0 П_1) = (192{,}2 - 299{,}4) = -107{,}2$ (млн ц);

3) за счет изменения структуры посевных площадей:

$$\Delta_{в.сб(стр.П)} = \frac{\sum y_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum y_0 П_0}{\sum П_0} \times \sum П_1.$$

Таким образом, делаем вывод, что общее уменьшение валового сбора озимых зерновых в 2015 г. по сравнению с 2011 г. (на 200,3 млн, ц) обусловлено тремя факторами:

1) на 109,7 млн ц уменьшился за счет сокращения размера посевных площадей под озимыми зерновыми культурами;

2) на 107,2 млн ц уменьшился за счет снижения урожайности отдельных культур;

3) на 16,6 млн ц увеличился за счет изменения структуры посевных площадей,

т. е. в целом –200,3 = –109,7 + (–107,2) + 16,6.

Сумму двух последних слагаемых можно рассматривать как изменение валового сбора за счет изменения средней урожайности озимых зерновых (–107,2 + 16,6 = –90,6 млн ц).

Эту же величину, т. е. изменение валового сбора за счет динамики средней урожайности, можно получить следующим расчетом:

$$\Delta_{в.сб(стр.П)} = (\overline{y_1} - \overline{y_0}) \times \sum П_1 = (\frac{\sum y_0 П_1}{\sum П_1} : \frac{\sum y_0 П_0}{\sum П_0}) \times \sum П_1 = \sum y_1 П_1 - \sum y_0 П_0 \times$$

$$\times \frac{\sum П_1}{\sum П_0} = 192{,}2 - 392{,}5 \times \frac{11{,}87}{16{,}48} = -90{,}5 .$$

(Небольшое расхождение (–90,6 и –90,5) вызвано округлениями в расчетах).

Задача 2.9

Определить изменение производительности труда на фабрике, если известно, что за отчетный период объем выпускаемой продукции увеличился в 1,2 раза, а численность работающих возросла на 12%.

Решение:

На основе взаимосвязанных индексов можем записать

$I_{произв.труда} = I_{об.прод} \times I_{чис.работ}. = 1{,}2 : 1{,}12 = 1{,}071$, или 107,1%,

т. е. производительность труда возросла за отчетный период на 7,1% (107,1% – 100%).

Контрольные вопросы

1. Какие индексы называются общими, а какие индивидуальными?
2. Какие существуют способы построения общих индексов?
3. В чем суть построения агрегатных индексов?
4. Как строятся средние индексы из индивидуальных?
5. Какие индексы называют цепными и какие базисными?
6. Какая существует связь между цепными и базисными индексами?
7. В чем суть индексов переменного и фиксированного составов?
8. Приведите примеры взаимосвязанных индексов.
9. Что характеризует индекс структурных сдвигов и как он рассчитывается?

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Задача 1

Имеются следующие данные за два периода о ценах и объемах реализации трех видов товаров по одному из торговых предприятий:

Вид товара	Базисный период		Текущий период	
	Цена за единицу, руб. p_0	Продано товаров, шт. q_0	Цена за единицу, руб. p_1	Продано товаров, шт. q_1
А	45	2500	87	1700
Б	27	830	35	2300
В	12	610	14	1000

Рассчитать:

1) индивидуальные индексы цен (по каждому виду товаров);
2) индивидуальные индексы физического объема реализации товаров;
3) общий индекс цен:
   а) Ласпейреса;
   б) Пааше;
   в) Фишера;
4) общий индекс физического объема (по методу Ласпейреса);
5) индекс товарооборота (стоимость товаров).

Ответ:

1) 1,93 раза, 1,29, 1,17;
2) 0,68, 2,77, 1,64;
3) а) 179%, б) 161%, в) 169%;
4) 105,9%;
5) 170,4%.

Задача 2

Имеются следующие данные об изменении физического объема розничного товарооборота в РФ в 2015 г.:

Группа товаров	Индекс физического объема товарооборота 2015 г., % к 2014 г.	Структура товарооборота в 2014 г., %
Продовольственные	90,5	42
Непродовольственные	94,8	58

Рассчитать общий индекс физического объема розничного товарооборота РФ в 2015 г. по сравнению, с 2014 г.

Ответ: 93%.

Задача 3

Имеются следующие данные по РФ об изменении физического объема розничного товарооборота (Iф.об т/об) по группам товаров в 2014 и 2015 гг. (% к 2010 г.).

Группа товаров	Структура розничного товарооборота, % к итогу		Iф.об т/об % к 2010 г.		Iф.об т/об 2015 % к 2014 г.
	2010	2015	2014	2015	
Продовольственные	47	48	80	78	?
Непродовольственные	53	52	96	90	?
Все товары	100	100	?	?	?

Определить индекс физического объема товарооборота в 2015 г. по сравнению с 2014 г.:

а) по каждой группе товаров;

б) в целом по всем товарам

Ответ: а) 98%, 94%; б) 95,4%.

Задача 4

Динамика промышленного производства РФ за 2010 — 2015 гг. характеризуется следующими данными:

Год	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Индекс физического объема, % к предыдущему периоду	92	82	86	79	97	96

Определить:

1) индекс физического объема промышленного производства в 2015 г. по сравнению с 2009 г.;

2) среднегодовой коэффициент снижения производства за указанный период;

Ответ: а) 47,7%; б) –11,6%.

Задача 5

Имеются данные об индексе потребительских цен (ИПЦ) в 2015 г.:

Товары и услуги	ИПЦ к предыдущему периоду (2014 г.), в разах	Структура потребительских расходов в базисном периоде (2014 г.)
Продовольственные товары	2,0	49,8
Непродовольственные товары	2,4	9
Платные услуги	2,8	9
Сводный индекс	2,3	100,0

Определить в структуре потребительских расходов долю:

1) непродовольственных товаров;

2) платных услуг.

Ответ: 1) 25,4%; 2) 24,8%

Задача 6

Рассчитать по производимым ниже данным общие индексы:

1) физического объема товарооборота;

2) цен;

3) стоимости продукции.

Товар	Индивидульный индекс цен, %	Стоимость проданной продукции, тыс. руб.	
		июль	август
Картофель	104	118	99
Молоко	102	26	28
Яйца	96	142	155

Ответ: 1) 99,3%; 2) 99,26%; 3) 98,6%.

Задача 7

Имеются следующие данные об индексах потребительских цен (ИПЦ) на товары и услуги населению (% к предыдущему месяцу):

2015	ИПЦ на все товары и услуги	В том числе:		
		продовольственные товары	непродовольственные товары	платные услуги
Январь	118	121	112	129
Март	109	108	109	110

Определить структуру расходов населения по указанным группам товаров и услуг.

Ответ: 1) 23,1%; 2) 53,8%; 3) 23,1%.

Задача 8

Определить долю товаров народного потребления и долю платных услуг в общем объеме товарооборота в 2010 г. по РФ, имея следующие данные:

Товары и услуги	Изменение цен и тарифов (2011 г. в % к 2010 г.)	Объем товарооборота и услуг в 2010 г. % к итогу
Товары народного потребления	195	?
Платные услуги населению	170,6	?
Итого	192,7	100

Ответ: 1) 90,5%; 2) 9,5%.

Задача 9

Имеются следующие данные по предприятию за два года:

Год	2014		2015	
Вид продукции	Себестоимость единицы продукции, руб.	Количество произведенной продукции, тыс. шт.	Себестоимость единицы продукции, руб.	Количество произведенной продукции, тыс. шт.
А	300	22	400	25
Б	700	13	820	10
В	80	9	100	18

1. Рассчитать сводный (общий) индекс себестоимости продукции

2. Определить изменение общих затрат на производство (относительное и абсолютное) и разложить абсолютный прирост (уменьшение) по факторам:

а) за счет изменения себестоимости единиц, продукции отдельных видов и

б) за счет изменения количеству произведенной продукции.

Ответ: 1) 125,5%; 2) 121,8%, + 3580 тыс. руб., в том числе:
а) 4060 тыс. руб.; б) –480 тыс. руб.

Задача 10

Имеются следующие данные по РФ об урожайности и валовом сборе пшеницы в 2010 г. и в 2011 г.

Культура	Урожайность, ц/га		Валовой сбор, млн ц	
	2010	2011	2010	2011
Пшеница озимая	16,9	17,9	138	167
Пшеница яровая	10,3	11,0	163	182

Рассчитать:

1) индексы урожайности пшеницы: а) переменного; б) фиксированного состава;

2) индекс структурных сдвигов (влияния изменения структуры посевных площадей на динамику средней урожайности);

3) изменение (в абсолютном выражении) валового сбора пшеницы в 2011 г. по сравнению с 2010 г. — всего и в том числе за счет изменения:

а) урожайности;

б) посевных площадей (размера);

в) структуры посевных площадей.

Ответ: 1) а) 107,4%; б) 106,3%; 2) 101%; 3) 48 млн ц:
а) 20,8 млн ц; б) 23,84 млн ц; в) 3,36 млн ц.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич, М. В. Статистика в таблицах, формулах и схемах. – СПб. [и др.]: Питер, 2009. – 128 с.

2. Воронин, В. Ф. Статистика: учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Воронина. – М.: ЮНИТИ, 2012. – 535 с.

3. Гусаров, В. М. Общая теория статистики : учеб. пособие для вузов / В. М. Гусаров, С. М. Проява. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2008. – 207 с.

4. Ефимова, М. Р. Общая теория статистики : учебник для студ. вузов, обучающихся по спец.: финансовый, банковский, производственный менеджмент, бух. учет и аудит, международные экон. отношения. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Инфра-М, 2009. – 413 с. – (Высшее образование: сер. осн. в 1996 г.).

5. Лысенко, С. Н. Общая теория статистики : учебное пособие для вузов / С. Н. Лысенко, И. А. Дмитриева. – М. : Вузовский учебник, 2012. – 218 с.

6. Статистика : учебник для бакалавров / И. И. Елисеева, Н. М. Гордеенко, О. В. Долотовская, И. И. Егорова, М. В. Боченина ; под ред И. И. Елисеевой; С.-Петерб. гос. ун-т экон. и финансов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 558 с. – (Бакалавр).

7. Статистика : учебник для бакалавров : для студ. вузов, обучающихся по экономическим спец. / С.-Петерб. гос. ун-т экон. и финансов ; под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Юрайт, 2011. – 565 с. : табл. – (Бакалавр).

8. Статистика : учебник для вузов / И. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Проспект, 2011. – 444 с.

9. Статистика: учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Инфра-М, 2009. – 444 с. – (Высшее образование: сер. осн. в 1996 г.).

10. Теория статистики : метод. указ. по выполнению типового расчета по дисциплине «Теория статистики» для студентов дневной формы обучения специальностей 08010565 «Финансы и кредит» 08010965 «Бухгалтерский учет и аудит». Ч. 1 / Т. Г. Старостина. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 28 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

БЕНЬКО Елена Викторовна

ПРАКТИКУМ

Методические указания
Часть 2

Редактор Н.А. Евдокимова

Подписано в печать 14.08.2015. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,56. Тираж 30 экз. Заказ 648. ЭИ № 545.
Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.
ИПК«Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.