

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Методические указания к лабораторным работам по физике  
для бакалавров по техническим направлениям подготовки

Составитель Т.А. Новикова

Ульяновск  
УлГТУ  
2012

УДК 534: 535(076)

ББК 22.3я7

Ф50

Рецензент декан радиотехнического факультета, профессор кафедры «Радиотехника» УлГТУ, канд. техн. наук В. Н. Рогов

Одобрено секцией методических пособий научно–методического совета Ульяновского государственного технического университета

**Ф50 Физика колебаний:** методические указания к лабораторным работам по физике для бакалавров по техническим направлениям подготовки / сост. Т. А. Новикова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 122 с.

Методические указания включают описание семи моделируемых лабораторных работ и составлены в соответствии с рабочими программами по разделу «Колебания» дисциплины «Физика» для бакалавров технических направлений подготовки. Структурно лабораторные работы распределены по трем разделам: «Собственные колебания», «Вынужденные колебания» и «Параметрические колебания».

Работа подготовлена на кафедре «Физика».

**УДК 534: 535(076)**

**ББК 22.3я7**

© Новикова Т. А., составление, 2012

© Оформление. УлГТУ, 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
<b>РАЗДЕЛ 1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	
<b>Теоретические сведения о собственных колебаниях .....</b>	<b>5</b>
<b>Лабораторная работа № 1</b>	
Собственные колебания линейного осциллятора .....	20
<b>Лабораторная работа № 2</b>	
Осциллятор с сухим и вязким трением .....	28
<b>Лабораторная работа № 3</b>	
Колебания и перевероты жесткого маятника .....	39
<b>РАЗДЕЛ 2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	
<b>Теоретические сведения о вынужденных колебаниях .....</b>	<b>53</b>
<b>Лабораторная работа № 4</b>	
Вынужденные колебания линейного осциллятора .....	63
<b>Лабораторная работа № 5</b>	
Осциллятор с несинусоидальной внешней силой .....	76
<b>РАЗДЕЛ 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	
<b>Теоретические сведения о параметрических колебаниях .....</b>	<b>88</b>
<b>Лабораторная работа № 6</b>	
Параметрическое возбуждение линейного осциллятора .....	97
<b>Лабораторная работа № 7</b>	
Параметрические колебания при плавной модуляции параметра ..	109
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>122</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат теоретический материал, описания семи моделируемых лабораторных работ по части «Колебания» курса физики для бакалавров технических профилей подготовки. Структурно работы распределены по трем разделам: «Собственные колебания», «Вынужденные колебания» и «Параметрические колебания».

Раздел 1 «Собственные колебания» содержит описание трех работ. В лабораторной работе №1 рассматриваются колебания торсионного пружинного осциллятора. В лабораторной работе №2 изучается осциллятор с сухим и вязким трением. Колебания и перевороты жесткого маятника рассмотрены в лабораторной работе №3.

Раздел 2 «Вынужденные колебания» включает описание двух работ. В лабораторной работе №4 изучаются вынужденные колебания осциллятора под действием периодической силы. В лабораторной работе №5 рассмотрен осциллятор с несинусоидальной внешней силой.

Раздел 3 «Параметрические колебания» содержит описание двух работ. В лабораторной работе №6 рассмотрены колебания осциллятора под действием принудительной модуляции момента инерции маховика, который изменяется скачком. В лабораторной работе №7 изучаются колебания осциллятора при плавном изменении параметра.

При подготовке к лабораторной работе студентам рекомендуется ознакомиться с теоретическими сведениями, содержащимися в начале соответствующего раздела. Для изучения теории необходимо также использовать учебники, указанные в библиографическом списке (с. 122).

Перед выполнением работы требуется составить конспект, который должен включать: 1) основные теоретические сведения по теме работы (физические термины и формулы); 2) рисунок и описание исследуемой колебательной системы. Качество подготовки к лабораторной работе студент может проверить самостоятельно, ответив на контрольные вопросы, находящиеся в конце описания работы.

## РАЗДЕЛ 1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

#### Физическая система

Колебаниями называют физические процессы, которые повторяются во времени.

Физическая модель, которую используют для изучения реальной колебательной системы, называется *линейным или гармоническим осциллятором*. В этой модели вводят следующее предположение. Если однократно вывести осциллятор из состояния равновесия, то в такой системе возникнет возвращающая сила, которая будет стремиться вернуть осциллятор обратно в положение равновесия. Возвращающая сила по величине прямо пропорциональна смещению и направлена против смещения. Физические величины, которые описывают колебания осциллятора, изменяются со временем по гармоническому закону косинуса или синуса.

Приведем примеры колебательных систем, к которым применима модель линейного осциллятора:

- а) пружинный маятник – груз, подвешенный на упругой пружине, которая подчиняется закону Гука при малых смещениях;
- б) математический и физический маятники, совершающие малые отклонения от вертикали в поле тяготения;
- в) электрический колебательный контур, состоящий из предварительно заряженного конденсатора, катушки и резистора, которые соединены последовательно в цепь.

В лабораторных работах проводят моделирование колебаний еще одного гармонического осциллятора – торсионного пружинного осциллятора, изображение которого приведено на рис. 1.1.

Осциллятор состоит из уравновешенного маховика (или ротора), который может вращаться относительно неподвижной оси, перпендикулярной плоскости, в которой расположены ротор. Ротор сцеплен с невесомой спиральной пружиной одним из ее концов. Другой конец пружины жестко закреплен.

При отклонении маховика на некоторый угол относительно точки 0 (положения равновесия) пружина, упруго деформируясь, закручивается, и ротор останавливается в крайнем положении. Затем пружина раскручивается, возвращая маховик в положение равновесия. Ротор проходит это положение и отклоняется в другую сторону до остановки. Пружина заставляет его опять вернуться в положение равновесия и т. д. Таким образом, торсионный осциллятор совершает крутильные колебания вправо-влево относительно точки 0.

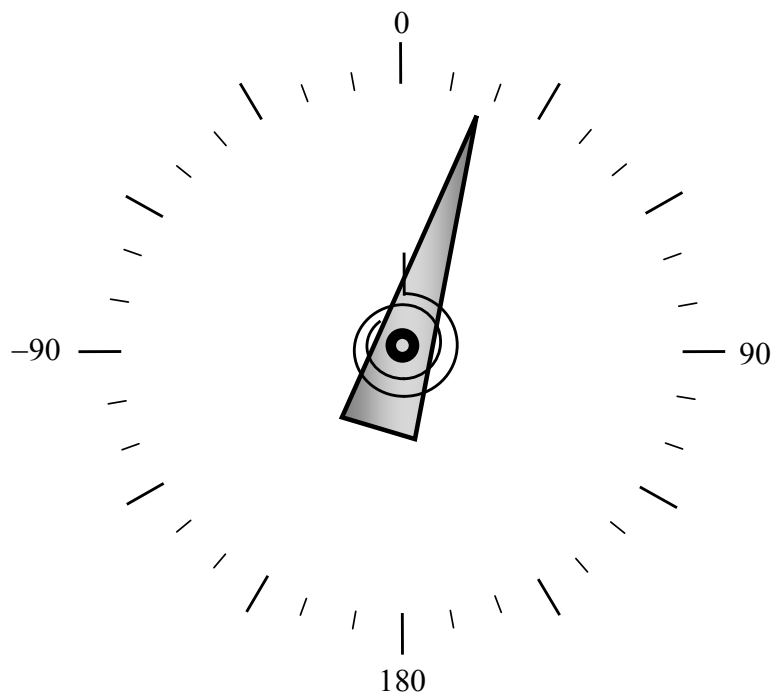


Рис.1.1. Торсионный пружинный осциллятор

Физические параметры системы, характеризующие торсионный осциллятор: момент инерции маховика  $J$ , постоянная пружины  $D$  (модуль кручения), постоянная затухания  $\gamma$  (с учетом вязкого трения среды).

## Колебания в отсутствие трения

Рассмотрим собственные колебания торсионного осциллятора в отсутствие трения, т. е. исключая пренебрежимо малую для данного случая силу вязкого трения среды.

В модели осциллятора предполагается, что момент силы упругости закрученной пружины  $N$ , возвращающий ротор в положение равновесия, пропорционален углу отклонения ротора из положения равновесия  $\varphi$ :

$$N = -D\varphi . \quad (1.1)$$

Применим к маховику, движущемуся с угловым ускорением  $\varepsilon$ , основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела  $N = J\ddot{\varphi}$ . Переносим все величины в левую часть (1.1), получим дифференциальное уравнение для собственных колебаний торсионного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 . \quad (1.2)$$

Здесь введены обозначения:  $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение,  $\omega_0^2 = \frac{D}{J}$  – квадрат угловой частоты колебаний. Решением уравнения (1.2) является закон гармонических колебаний угла  $\varphi$  от времени  $t$ :

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0) . \quad (1.3)$$

Амплитуда  $\varphi_m$  и начальная фаза  $\alpha_0$  зависят от способа возбуждения колебаний, т. е. от *начальных условий*: угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0) = \frac{d\varphi(0)}{dt}$  при  $t = 0$ . Частота  $\omega_0$  и период колебаний  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  не зависят от начальных условий, а полностью определяются параметрами системы, т. е. величинами модуля кручения проволоки  $D$  и моментом инерции маховика  $J$ .

Собственные колебания осциллятора без трения, как колебания консервативной системы, происходят с обратимыми превращениями

кинетической и потенциальной энергий. Полная механическая энергия колебаний  $E$  торсионного пружинного осциллятора равна сумме потенциальной энергии  $E_p$  деформированной на угол  $\varphi$  пружины и кинетической энергии  $E_k$  вращающегося с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$  ротора:

$$E = E_p + E_k = \frac{D\varphi^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (1.4)$$

Кинетическая энергия ротора равна нулю, когда он находится в точках максимального отклонения от положения равновесия. В этом случае полная механическая энергия системы равна максимальной потенциальной энергии деформированной пружины  $E = E_{p \max}$ .

Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная механическая энергия осциллятора равна максимальной кинетической энергии вращающегося маховика  $E = E_{k \max}$ . В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругой деформации.

Таким образом, два вида механической энергии торсионного осциллятора совершают колебания в противофазе друг с другом на частоте  $2\omega_0$ , т. е. на удвоенной частоте  $\omega_0$  колебаний угла отклонения. Сумма кинетической и потенциальной энергии колебаний (т. е. его полная механическая энергия  $E$ ) не изменяется по величине и имеет одинаковое значение в любой момент времени. Это значение совпадает с максимальными величинами каждого из этих двух видов энергии.

Полная механическая энергия осциллятора  $E$  пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний  $\varphi_m^2$ . Средние за период колебаний величины кинетической и потенциальной энергий осциллятора равны друг другу и составляют половину полной энергии  $E/2$ .



## Затухание под действием вязкого трения

Силы вязкого трения среды (жидкости или газа) тормозят механическое движение тел.

В модели осциллятора наличие вязкого трения приводит к тому, что механические колебания осциллятора с течением времени затухают. Для этого случая в левую часть дифференциального уравнения (1.2) необходимо добавить момент тормозящей силы  $N_{\text{тр}} = -2\gamma J\dot{\varphi}$ , пропорциональный мгновенному значению угловой скорости ротора  $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ . Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний угла отклонений осциллятора имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (1.5)$$

где величина *постоянной*  $\gamma$  или *коэффициента затухания* характеризует интенсивность влияния вязкого трения на колебания системы. Постоянная затухания  $\gamma$  имеет размерность частоты.

Если вязкое трение среды не очень велико  $\gamma < \omega_0$ , решение уравнения (1.4) может быть представлено в виде

$$\varphi = \varphi_m(t) \cos(\omega t + \alpha_0) = \varphi_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (1.6)$$

Уравнение (1.5) описывает собственные затухающие колебания угла отклонения, *амплитуда* которых  $\varphi_m(t) = \varphi_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает с течением времени. Начальное значение амплитуды ротора  $\varphi_0$  и начальная фаза  $\alpha_0$  зависят от способа возбуждения колебаний и определяются из начальных условий. Частота затухающих колебаний  $\omega$  задается выражением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}. \quad (1.7)$$

Промежуток времени  $\tau$  называют *временем затухания* или *временем релаксации*, если за этот интервал времени амплитуда колебаний  $\varphi_m(t)$  уменьшается приблизительно в  $e \approx 2,72$  раза. Время

релаксации и коэффициент затухания обратно пропорциональны друг другу:  $\tau = \frac{1}{\gamma}$ .

Для характеристики быстроты затухания колебаний системы используют безразмерный *логарифмический декремент затухания*  $\theta$ . Он равен натуральному логарифму отношения последовательных максимальных отклонений осциллятора в одну сторону (т. е. двух амплитуд через один период):

$$\theta = \ln \frac{\varphi_m(t)}{\varphi_m(t+T)} = \gamma T . \quad (1.8)$$

Так как  $N_{1/e} = \tau/T$  — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания, то логарифмический декремент затухания обратно пропорционален этому числу:  $\theta = 1/N_{1/e}$ . Чем больше величина  $\theta$ , тем колебания затухают быстрее.

Другая безразмерная величина, которая характеризует качество колебаний системы в среде, это — *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_{1/e} . \quad (1.9)$$

Таким образом, число циклов  $N_{1/e}$ , на протяжении которых размах (амплитуда) колебаний осциллятора уменьшается из-за трения среды в  $e \approx 2,72$  раза, равно величине добротности колебаний, деленной на число  $\pi \approx 3,14$ :  $N_{1/e} = Q/\pi$ .

Число колебаний  $N_{1/2}$ , за которые амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность системы следующим соотношением:

$$N_{1/2} = \frac{Q}{\pi} \ln 2 \approx 0,22Q \approx Q/4,53 . \quad (1.10)$$

К примеру, если добротность системы равна  $Q = 9,06$ , амплитуда колебаний уменьшается в два раза за два цикла колебаний, а если  $Q = 18,1$  — то за четыре полных цикла.

Рассмотрим *малое трение среды* (малые затухания колебаний системы). В этом случае коэффициент затухания  $\gamma$  гораздо меньше величины  $\omega_0$  – собственной частоты колебаний в отсутствие трения:  $\gamma \ll \omega_0$ . Тогда частота затухающих колебаний ротора близка к  $\omega_0$ :

$$\omega \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0}. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.10) получено из (1.6) с учетом того, что  $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ . Тогда  $T \approx T_0 = 2\pi / \omega_0$ , и отношение следующих через один цикл максимальных отклонений ротора равно

$$\frac{\varphi_N}{\varphi_{N+1}} \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, максимальные отклонения осциллятора убывают со временем в геометрической прогрессии. Отношение же последовательных амплитуд меньше единицы на величину  $\gamma T_0 \ll 1$ .

Добротность системы (1.9) при малых затуханиях равна:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (1.13)$$

Во всех реальных системах часть механической энергии колебаний теряется (или рассеивается) из-за работы сил вязкого трения среды по торможению системы. Поэтому взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий колебаний системы необратимы.

Рассеяние энергии на протяжении цикла колебаний происходит неравномерно. Скорость потерь  $-\frac{dE}{dt}$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда угловая скорость маховика максимальна. В самом деле, скорость рассеяния энергии из-за вязкого трения (момент силы трения равен  $N_{\text{тр}} = -2\gamma J \dot{\varphi}$ ) пропорциональна квадрату угловой

скорости ротора, т. е. мгновенному значению кинетической энергии маховика:

$$-\frac{dE}{dt} = -N_{\text{тр}} \frac{d\varphi}{dt} = 2\gamma J\dot{\varphi}^2 . \quad (1.14)$$

В точках поворота, когда маховик меняет направление вращения и где его угловая скорость обращается в нуль, рассеяния энергии колебаний не происходит.

Усредненная по периоду колебаний величина механической энергии осциллятора убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$\langle E \rangle = E_0 \exp(-2\gamma t) . \quad (1.15)$$

Время затухания средней энергии (время, в течение которого  $\langle E \rangle$  убывает в  $e \approx 2,72$  раза) равно  $\tau/2$ , т. е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний осциллятора (времени релаксации  $\tau$ ).

### Критическое затухание

Рассмотрим *сильные затухания* колебаний, когда сила вязкого трения среды велика и  $\gamma \geq \omega_0$ . Как показывает опыт, в этом случае осциллятор после однократного вывода из положения равновесия возвращается в исходное состояние без колебаний.

Возможны два типа движения ротора после отклонения: 1) ротор асимптотически медленно приближается к положению равновесия с одной стороны; 2) ротор один раз пересекает положение равновесия и затем асимптотически приближается к нему с другой стороны. Последний вид движения наблюдается, когда при начальном отклонении от положения равновесия ротору сообщают достаточно большую начальную скорость в направлении этого положения.

Если  $\gamma = \omega_0$ , то затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения колебаний имеет вид

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (1.16)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если находящийся в положении равновесия в начальный момент времени ротор  $\varphi(0) = 0$  в результате толчка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(0) = \Omega$ , то  $C_1 = \Omega$ ,  $C_2 = 0$ , и движение ротора описывается убывающей со временем функцией

$$\varphi(t) = \Omega t \exp(-\gamma t). \quad (1.17)$$

В лабораторных работах выражение для добротности (1.13) принято за характеристику безразмерного отношения  $\gamma / \omega_0$ . Критическому затуханию, когда  $\gamma = \omega_0$ , соответствует добротность  $Q = 0,5$ .

Системы с критическим затуханием имеют важную особенность: после начального возбуждения они возвращаются в положение равновесия и останавливаются гораздо быстрее, чем при любом другом значении добротности. *При критическом затухании характерное время прихода в состояние покоя  $t_n$  по порядку величины равно периоду колебаний осциллятора в отсутствие трения  $t_n \approx T_0$ .*

Чтобы специально погасить нежелательные механические колебания, в среду вводят дополнительные вязкие силы. Этот процесс называют *демпфированием*, или успокоением, колебательной системы.

Например, производят демпфирование подвижной части стрелочных приборов, таких как гальванометры и амперметры. Это делают для того, чтобы преодолеть трудности считывания показаний со шкалы прибора, которые происходят из-за нежелательных осцилляций (колебаний) стрелки. Колебания стрелки возникают при недостаточной силе вязкого трения (малом демпфировании).

Демпфирование прибора называют *критическим*, если стрелка останавливается быстро и без колебаний, для максимально быстрого успокоения колебаний затухания стрелки должны быть критическими с добротностью, как указано было выше,  $Q = 0,5$ .

Другой распространенный пример введения в среду дополнительных вязких сил относится к амортизаторам упругой подвески колес автомобиля. Нежелательные колебания кузова возникают всякий раз после наезда колес на неровности дорожного покрытия. Чтобы быстро погасить эти колебания, проводят критическое демпфирование подвижной части амортизаторов.

Итак, при затухании, меньше критического, после начального возбуждения движение осциллятора имеет почти колебательный характер (с многократными пересечениями положения равновесия). Осциллятор с критическим (и сверхкритическим) затуханием после возбуждения возвращается в положение равновесия асимптотически, не совершая колебаний, т. е. не пересекая более одного раза положение равновесия.

### **Фазовая диаграмма линейного осциллятора**

Колебания торсионного осциллятора можно задать двумя переменными: углом отклонения  $\varphi$  и угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ . Состояние колебаний системы можно изобразить в *фазовой плоскости*: по оси абсцисс отложить угол отклонения  $\varphi$ , а по оси ординат — угловую скорость  $\dot{\varphi}$ .

Наглядное графическое представление для колебаний дает *фазовая траектория*, т. е. линия, которая вычерчивается на фазовой плоскости при колебании системы. Фазовая траектория представляет собой непрерывное множество точек на фазовой плоскости.

Семейство фазовых траекторий, которые относятся к разным начальным условиям возбуждения колебаний при неизменных параметрах системы, составляют *фазовый портрет* колебаний на фазовой плоскости. Через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна фазовая траектория.

Исключение составляют отдельные, изолированные точки фазовой плоскости. Точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит вообще ни одной траектории, называются *особыми*. Фазовый портрет (вместе с особыми точками) дает наглядное представление о возможных движениях колеблющейся системы.

При гармонических колебаниях фазовая траектория описывает *замкнутую кривую* в направлении по часовой стрелке, так как система стремится в исходное состояние после каждого цикла колебаний. Обход вдоль всей замкнутой фазовой траектории занимает один период колебаний. *Точки поворота*, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора от положения равновесия.

Из картины фазовой траектории можно проанализировать характер различных колебаний осциллятора. Рассмотрим конкретные примеры.

1. Фазовая траектория собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения — эллипс или окружность при соответствующем выборе масштаба. Фазовый портрет линейного осциллятора — набор геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), то такая особая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*. На рис. 1.2, а изображен фазовый портрет для этого случая.

2. В случае малого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные значения углов отклонения ротора и максимальные значения его угловой скорости постепенно уменьшаются с каждым последующим

циклом колебаний. Благодаря трению, фазовая траектория постепенно формируется в скручивающуюся спираль. Сжимающиеся витки спирали наматываются вокруг точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости — особой точке. Такая особая точка является особой точкой типа *фокус* (см. рис. 1.2, б).

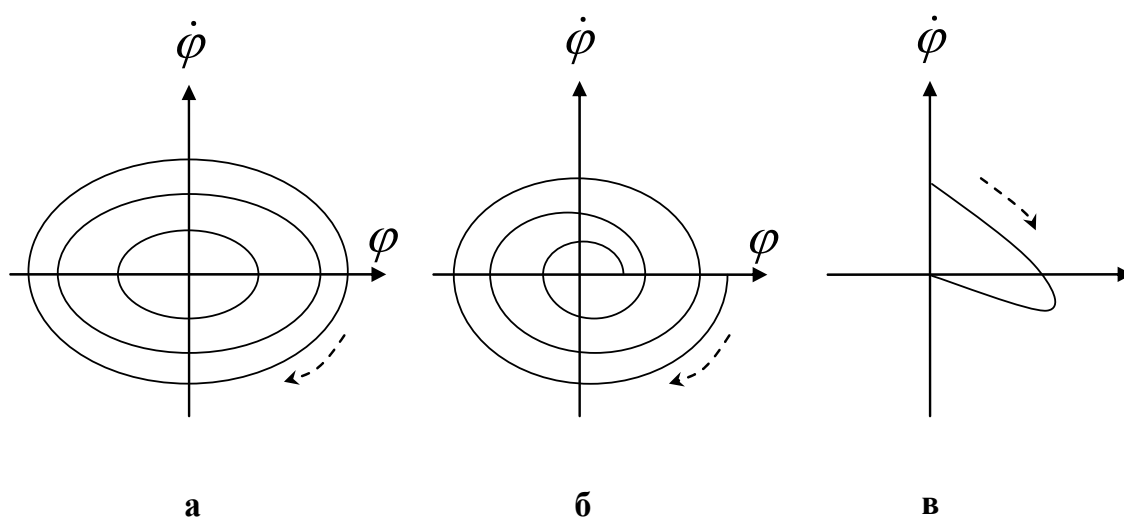


Рис. 1.2. Фазовые диаграммы линейного осциллятора: незатухающего (а), затухающего (б) и со сверхкритическим затуханием ( $\gamma > \omega_0$ ) (в)

3. При сильном трении ( $\gamma \geq \omega_0$ ) осциллятор возвращается в исходное состояние без колебаний. Фазовая траектория такого движения, не совершив ни одного оборота, асимптотически приближается к началу координат (особой точке). Такая особая точка на фазовой плоскости называется особой точкой типа *узел*: Фазовая траектория осциллятора в сверхкритическом режиме для случая возбуждения начальным толчком из положения равновесия ( $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_{\max}$ ,  $\varphi(0) = 0$ ) изображена на рис. 1.2, в.

Таким образом, на фазовом портрете колебаний линейного осциллятора есть только одна особая точка — начало координат фазовой плоскости, где переменные  $\varphi = 0$  и  $\dot{\varphi} = 0$ . Этой точке соответствует положение равновесия в состоянии покоя. Для колебаний без трения



( $\gamma = 0$ ) — это точка типа центр, через которую не проходит ни одна фазовая траектория. При малом трении ( $\gamma < \omega_0$ ) — это фокус, при большом сверхкритическом трении ( $\gamma \geq \omega_0$ ) — это узел фазовых траекторий.

### Электромагнитный аналог механического осциллятора

Рассмотрим замкнутый электрический колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора емкости  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и резистора с электрическим сопротивлением  $R$  (рис. 1.3). Колебания заряда  $q$  на пластинах конденсатора в этой системе описываются таким же дифференциальным уравнением, что и колебания угла отклонения  $\varphi$  механического торсионного осциллятора.

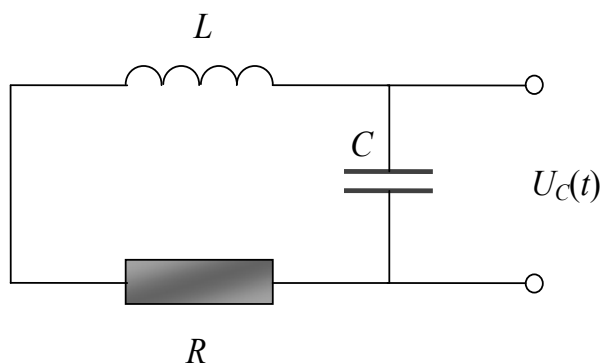


Рис. 1.3. Электрический колебательный контур – электромагнитный осциллятор

Аналогом массивного ротора можно считать катушку (энергия магнитного поля катушки аналогична кинетической энергии ротора); аналогом упругой пружины — конденсатор (энергия электрического поля в конденсаторе аналогична потенциальной энергии закрученной пружины). Аналогом электрического сопротивления в контуре является сила вязкого трения среды для механического осциллятора.

После однократной зарядки конденсатора в контуре происходят колебания тока, заряда на конденсаторе и напряжений на каждом из

участков цепи. Причина возникновения электромагнитных колебаний – ЭДС самоиндукции катушки, приводящая к периодической перезарядке конденсатора. Величину тока в электрическом контуре можно считать приблизительно одинаковой на всех участках цепи.

Алгебраическая сумма напряжений  $U_C$ ,  $U_L$ , и  $U_R$  на отдельных участках замкнутого контура равна нулю в любой момент времени:

$$U_C + U_L + U_R = 0 . \quad (1.18)$$

Подставляя в (1.18)  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $U_L = L \frac{dI}{dt} = L\dot{q}$  и  $U_R = IR = \frac{dq}{dt} R = \dot{q}R$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора  $q$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 . \quad (1.19)$$

Вводя обозначения  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $2\gamma = R/L$ , перепишем (1.19):

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 . \quad (1.20)$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением для угла отклонения  $\varphi$  ротора механического осциллятора.

Коэффициент затухания  $\gamma = \frac{R}{2L}$  определяет амплитуду и частоту затухающих колебаний заряда  $q(t) = q_m(t) \cos(\omega t + \alpha_0)$ :

$$q_m(t) = q_0 e^{-\gamma t} , \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} . \quad (1.21)$$

При малом сопротивлении  $\gamma < \omega_0$  величину добротности колебаний можно выразить через параметры контура:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (1.22)$$

Таким образом, собственные электромагнитные колебания в последовательном  $LCR$ -контуре и колебания механического

пружинного осциллятора, несмотря на совершенно разную физическую природу, подчиняются одинаковым закономерностям.

При колебаниях в электрическом колебательном контуре происходят взаимные превращения энергии электрического поля конденсатора и энергии магнитного поля катушки. В контуре с пренебрежимо малым сопротивлением ( $R = 0$ ) полная энергия колебаний остается неизменной. При существенном электрическом сопротивлении взаимные превращения энергии электрических и магнитных колебаний необратимы. Так же как силы вязкого трения среды приводят к затуханию механических колебаний осциллятора, рассеяние энергии электромагнитных колебаний на резисторе из-за выделения на нем количества теплоты (по закону Джоуля–Ленца) приводит к экспоненциальному затуханию амплитуд колебаний заряда, тока и напряжений в контуре.

# Лабораторная работа № 1

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

### 1. Цель работы

Изучить собственные колебания торсионного осциллятора.

### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста. Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 1 и описание работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 1.1

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения маховика
$\varphi_m$	Амплитуда колебаний ротора
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость ротора
$\dot{\varphi}_m$ $\omega_0$	Максимальная угловая скорость маховика в относительных единицах частоты
$Q$	Добротность (при наличии вязкого трения)

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают собственные крутильные колебания торсионного осциллятора, состоящего из уравновешенного ротора (маховика) со спиральной пружиной, которая закручивается при повороте маховика (см. рис.1.1). Торсионный осциллятор, в

частности, является аналогом реальной колебательной системы – балансового устройства механических часов.

#### 4. Порядок выполнения работы

4.1. Изучить колебания маятника в отсутствие трения.

Выбрать раздел «Графики колебаний». На панели ввода параметров снять «галочку» в боксе «Вязкое трение».

4.1.1. Провести моделирование колебаний из состояния покоя ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ) при заданной амплитуде  $\varphi_m$ .

В параметрах ввода задать  $\varphi(0) = 30^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.2 значение максимальной скорости маятника в относительных единицах частоты  $\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ . Повторить моделирование для других углов, указанных в таблице.

Максимальная угловая скорость и амплитуда колебаний связаны уравнением:  $\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0} = \varphi_m$ . Пересчитать амплитуду колебаний из градусов в радианы, заполнив третий столбец табл. 1.2 ( $\varphi_m = \varphi(0)$ ). Сравнить данные моделирования и расчетов.

Таблица 1.2

Результаты моделирования незатухающих колебаний из состояния покоя

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_m$ , рад
30		
60		
135		

**4.1.2.** Провести моделирование колебаний из положения равновесия ( $\varphi(0) = 0$ ), сообщая маятнику начальную скорость  $\dot{\varphi}(0)$ , которая задает амплитуду колебаний маятника:  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 \varphi_m$ .

В параметрах ввода задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 0,79$  рад. Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.3 величину  $\varphi_m$  в градусах. Повторить моделирование для других начальных угловых скоростей, указанных в таблице.

Начальная угловая скорость и амплитуда колебаний связаны уравнением  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = \varphi_m$ . Пересчитать амплитуду колебаний в радианы, заполнив третий столбец таблицы. Сравнить начальные данные и результаты расчетов.

Таблица 1.3

Результаты моделирования незатухающих колебаний начальным толчком

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_m$ , град	$\varphi_m$ , рад
0,79		
1,57		
2,09		

**4.1.3.** Перейти в раздел «Фазовые траектории». Провести моделирование при одном из начальных условий, которые уже были заданы. Перенести с экрана в отчет фазовую траекторию маятника в отсутствие трения.

**4.1.4.** Провести моделирование колебаний, задавая начальное отклонение  $\varphi(0)$  и начальную скорость  $\dot{\varphi}(0)$  маятника.

В параметрах ввода задать  $\varphi(0) = 45^\circ$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1,36$  рад. Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.4 величину  $\varphi_m$  в градусах. Повторить моделирование для других начальных условий, указанных в таблице.

Найти теоретическое значение для амплитуды  $\varphi_m$  по формуле

$$\varphi_m = \sqrt{\varphi^2(0) + \frac{\dot{\varphi}^2(0)}{\omega_0^2}}. \quad (1.23)$$

Занести результаты расчетов в таблицу. Сравнить результаты моделирования амплитуды колебаний и результаты расчетов по формуле, переводя их в градусы.

Таблица 1.4

Результаты моделирования незатухающих колебаний маятника

Начальные условия		Результаты моделирования	Результаты расчетов	
$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_m$ , град	$\varphi_m$ , рад	$\frac{2}{D} E_k^{равн}$ , рад <sup>2</sup>
15	0,69			
30	0,91			
45	1,36			
60	1,81			

#### 4.1.5. Перейти в раздел «Преобразования энергии».

Провести моделирование для всех начальных условий, указанных в таблице 1.4. Обратит внимание, что в процессе колебаний, когда маятник проходит положение равновесия, его кинетическая максимальна, а в точках поворота – максимальна потенциальная энергия маятника:

$$E_k^{равн} = \frac{J\dot{\varphi}_m^2}{2}, \quad E_n^{равн} = 0 \quad \text{и} \quad E_k^{нов} = 0, \quad E_n^{нов} = \frac{D\varphi_m^2}{2}.$$

Так как  $\dot{\varphi}_m = \omega_0 \varphi_m$  и  $\omega_0^2 = D/J$ , то величины энергий равны  $E_k^{равн} = E_n^{нов}$ .  
 Для каждого опыта оценить эти значения в относительных единицах:

$$\frac{2}{D} E_k^{равн} = \varphi_m^2 . \quad (1.24)$$

Занести результаты расчетов в табл. 1.4.

#### 4.2. Изучить затухающие колебания маятника.

Выбрать раздел «Физическая система». На панели ввода параметров поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и ввести значение добротности  $Q = 10$ .

**4.2.1.** В параметрах ввода задать начальные условия:  $\varphi(0) = 120^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажать клавишу «Пуск» и провести моделирование. Не меняя условий, получить данные в разделах «Фазовая траектория» и «Превращения энергии». Результаты наблюдений записать во второй строке таблицы 1.5.

Таблица 1.5

Результаты моделирования затухающих колебаний маятника

Вид функции $\varphi(t)$	Вид функции $\dot{\varphi}(t)$	Вид фазовой траектории колебаний	Вид функции $E_k(t)$	Вид функции $E_n(t)$

#### 4.2.2. Изучить фазовую траекторию затухающих колебаний.

Перейти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование с при тех же условиях. Убедиться, что при уменьшении амплитуды колебаний витки фазовой траектории становятся гуще (меньшего радиуса). Изобразить в отчете фазовую траекторию колебаний.

**4.2.3.** Открыть раздел «Превращения энергии». Провести моделирование колебаний при разных условиях. Оценить уменьшение энергии колебаний за половину условного периода (половину цикла).



Задать в панели ввода  $Q = 20$ ,  $\varphi(0) = 155^\circ$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1,07$  рад.

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование, записав с экрана в табл. 1.6 угол отклонения маятника через половину одного цикла  $\varphi(T/2)$  в градусах. Провести моделирование для других начальных данных таблицы.

Таблица 1.6

Результаты моделирования затухающих колебаний

Начальные условия			Результаты моделирования	Результаты расчетов
$Q$	$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi\left(\frac{T}{2}\right)$ , град	$\frac{\Delta E}{E_0} \cdot 100$ , %
20	155	1,07		
30	120	0,68		
40	90	0,44		

Сопоставить поведение изображающей точки на фазовой плоскости с графиком зависимости энергии от угла отклонения (в точках поворота изображающая точка достигает берегов потенциальной ямы, постепенно опускаясь на ее дно).

Для каждого опыта рассчитать рассеяние энергии колебаний за половину цикла по формуле

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\pi}{Q}. \quad (1.25)$$

Полученные числа перевести в проценты и занести в таблицу.

**4.2.4.** Провести моделирование движения маятника с критическим затуханием. Открыть раздел «Фазовые траектории». В параметрах ввода задать добротность, соответствующую критическому затуханию:  $Q = 0,5$ .

Ввести начальные данные  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1$  рад. Провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.7 максимальный угол отклонения маятника  $\varphi_{\max}$  в градусах. Повторить моделирование для других начальных угловых скоростей, указанных в таблице.

Рассчитать максимальный угол отклонения маятника при критическом затухании по формуле

$$\varphi_{\max} \approx \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} \cdot 0,37 . \quad (1.26)$$

Таблица 1.7

Результаты моделирования критического затухания маятника

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_{\max}$ , град	$\varphi_{\max}$ , град
1		
2		
3		
4		
5		

Заполнить табл. 1.7. Сравнить данные моделирования и расчетов.

### 5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение для собственных колебаний. Поясните термин «гармонический осциллятор».
2. Запишите дифференциальное уравнение собственных незатухающих колебаний для торсионного пружинного осциллятора. Раскройте смысл входящих в уравнение физических величин.

3. Запишите дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний для торсионного пружинного осциллятора при наличии вязкого трения.
4. Поясните смысл термина «критическое затухание». Чему равна добротность системы при критическом затухании?
5. С какой целью и где применяют демпфирование?
6. Что называют фазовой траекторией колебания? Как называют особые точки фазовой диаграммы колебаний? Раскройте смысл особых точек на фазовой плоскости для гармонического осциллятора.
7. Проведите аналогию между механическим и электромагнитным осцилляторами.

## Лабораторная работа № 2

### ОСЦИЛЛЯТОР С СУХИМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

#### 1. Цель работы

Изучить затухающие колебания торсионного осциллятора с сухим и вязким трением.

#### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста. Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 1 и описание работы.

2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 1.8

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения маховика
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость ротора
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость ротора в относительных единицах частоты
$\varphi_3$	Половина ширины зоны застоя
$Q$	Добротность (при наличии вязкого трения)

#### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают затухающие колебания торсионного осциллятора при действии разных сил трения (рис. 1.4). Подвижная часть

осциллятора – уравновешенный ротор или маховик, центр масс которого расположен на оси вращения. При повороте маховика закручивается спиральная пружина, прикрепленная к нему одним концом. Другой конец пружины неподвижен. Момент инерции маховика  $J$  и постоянная пружины  $D$  (модуль кручения) считаются известными.

Колебания такой системы при действии силы вязкого трения среды описаны в теоретическом введении к Разделу 1. При наличии вязкого трения сила натяжения не действует на пружину, когда ротор находится в одном положении – в положении равновесия. Только в этом случае маховик может находиться в состоянии покоя.

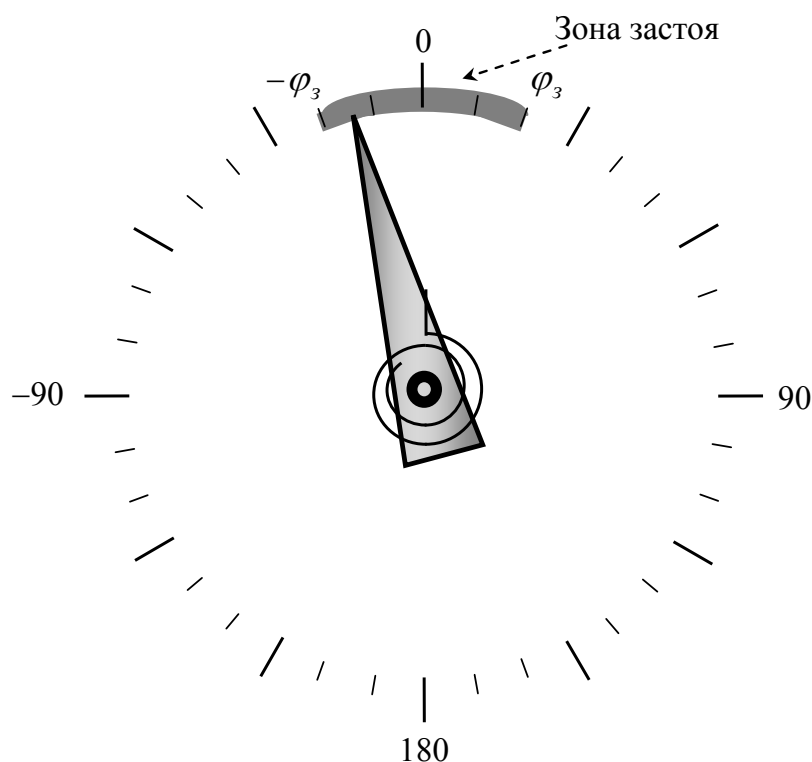


Рис. 1.4. Модель торсионного пружинного осциллятора с зоной застоя

При сухом трении, пока ротор находится в движении, величина силы трения скольжения остается практически постоянной и противоположна по направлению скорости маховика. Поэтому в работе для сухого трения принята модель ( $Z$  характеристика),

согласно которой сила трения скольжения не зависит от скорости вращения ротора и равна предельному значению силы трения покоя.

По обе стороны от точки 0 находится мертвая зона – *зона застоя*. Чем больше сухое трение (максимальное трение покоя), тем шире зона застоя. Сила трения покоя уравнивает силу натяжения деформированной пружины в зоне застоя, т. е. в пределах углов отклонения ротора  $[-\varphi_3, \varphi_3]$ . Если угловая скорость ротора обращается в нуль в пределах зоны застоя, то он останавливается и остается отклоненным от точки 0 на абсолютный угол  $\varphi < \varphi_3$  (см. рис.1.4). Дифференциальное уравнение колебаний осциллятора с сухим трением имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + N_{\text{с.тр}} . \quad (1.27)$$

Здесь для момента силы сухого трения принята  $Z$  – характеристика:

$$N_{\text{с.тр}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}}, & \dot{\varphi} > 0 \\ N_{\text{max}}, & \dot{\varphi} < 0 \end{cases} . \quad (1.28)$$

Момент силы  $N_{\text{с.тр}}$  направлен противоположно угловой скорости ротора и остается постоянным до тех пор, пока вращение происходит в одном направлении. Предельное (максимальное) значение момента силы сухого трения удобно выразить через половину ширины зоны застоя  $\varphi_3$ :

$$N_{\text{max}} = D\varphi_3 . \quad (1.29)$$

При сухом трении ротор совершает затухающие колебания относительно средних точек, смещенных поочередно к обеим границам зоны застоя  $\varphi_3$  и  $-\varphi_3$ . Длительность каждого цикла затуханий равна периоду собственных незатухающих колебаний осциллятора  $T_0 = 2\pi / \omega_0$  в отсутствие трения. После каждого цикла колебаний амплитуда ротора уменьшается на величину  $4\varphi_3$ , равную удвоенной ширине зоны застоя.

Колебания маховика продолжаются, пока он не остановится внутри зоны застоя, т. е. пока максимальное отклонение относительно средней точки не будет выходить за одну из границ зоны. Движение

ротора с сухим трением полностью прекращается после целого числа циклов колебаний.

Таким образом, в случае сухого трения амплитуда маховика уменьшается со временем линейно, а последовательность амплитуд представляет собой убывающую арифметическую прогрессию.

Наличие сухого трения характерно для стрелочных приборов, таких как гальванометры с подвижными катушками. В типичном гальванометре легкая катушка помещена между полюсами постоянного магнита. Катушка жестко насажена на тонкий металлический стержень вдоль оси симметрии. Стержень может вращаться, так как он закреплен с помощью подшипников. На стержне перпендикулярно укреплена стрелка прибора. Таким образом, стержень с закрепленными катушкой и стрелкой представляют собой подвижную часть гальванометра, которая может вращаться относительно оси симметрии катушки.

Также с металлическим стержнем соединена спиральная пружина одним концом, другой ее конец прикреплен неподвижно к корпусу прибора. При прохождении через катушку измеряемого тока катушка поворачивается в поле магнита вместе со стрелкой и стержнем, который закручивает спиральную пружину.

Если на стержень со стороны подшипников действует тормозящий вращение момент силы сухого трения, то стрелка гальванометра может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон метку на шкале. Этим явлением объясняется возникновение ошибок при измерении с помощью стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение в подшипниках стержня, тем больше погрешность однократного измерения.

Для уменьшения погрешностей измерений стрелочные приборы конструируют так, чтобы 1) ширина зоны застоя (с сухим трением)

была как можно более узкой; 2) среда, где движется стрелка, была вязкой для сильного (критического) затухания колебаний стрелки.

#### 4. Порядок выполнения работы

**4.1.** Изучить собственные колебания осциллятора в отсутствие трения.

Выбрать раздел «Графики колебаний». На панели ввода параметров: а) ввести нулевую ширину застоя для сухого трения; б) снять «галочку» в боксе «Вязкое трение»; в) ввести  $\varphi(0) = 120^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажать клавишу «Пуск» и провести моделирование. Не меняя условий, получить данные в разделах «Фазовая траектория» и «Превращения энергии». Результаты наблюдений записать во второй строке таблицы 1.9.

Таблица 1.9

Результаты моделирования незатухающих колебаний

Вид функции $\varphi(t)$	Вид функции $\dot{\varphi}(t)$	Вид фазовой траектории	Вид функции $E_k(t)$	Вид функции $E_n(t)$

**4.2.** Изучить затухающие колебания при вязком трении среды. Проверить экспоненциальный закон уменьшения амплитуды колебаний со временем.

Выбрать раздел «Графики колебаний». На панели ввода поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение». Ввести: а)  $Q=10$ ; б)  $\varphi(0) = 120^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Выполнить моделирование, занося с экрана в табл. 1.10 значения для максимальных отклонений ротора в одну сторону через период.

Таблица 1.10

Результаты моделирования для последовательности амплитуд при вязком трении

$\varphi_m(0)$ , град	$\varphi_m(T)$ , град	$\varphi_m(2T)$ , град	$\varphi_m(3T)$ , град	$\varphi_m(4T)$ , град



Убедиться в том, что получившийся численный ряд представляет убывающую геометрическую прогрессию:

$$\varphi_m(t+T) \approx \varphi_m(t) \cdot (1 - \gamma T_0) . \quad (1.30)$$

Отношения любой пары последовательных членов геометрической прогрессии должны быть одинаковы и поэтому приблизительно равны  $1 - \gamma T_0 \approx 1 - \pi / Q$ . Заполнить таблицу 1.11, рассчитав отношения амплитуд.

Таблица 1.11

Результаты расчетов для последовательности амплитуд при вязком трении

$\frac{\varphi_m(T)}{\varphi_m(0)}$	$\frac{\varphi_m(2T)}{\varphi_m(T)}$	$\frac{\varphi_m(3T)}{\varphi_m(2T)}$	$\frac{\varphi_m(4T)}{\varphi_m(3T)}$	$1 - \frac{\pi}{Q}$

**4.3.** Изучить затухающие колебания при сухом трении. Проверить линейный закон уменьшения амплитуды колебаний со временем.

В панели ввода: а) убрать «Вязкое трение»; б) ввести для зоны застоя  $\varphi_z = 10^\circ$ ; в)  $\varphi(0) = 120^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . При моделировании заносить с экрана в табл. 1.12 величины максимальных отклонений ротора в каждую сторону через каждый полпериода колебаний.

Убедиться в том, что получившийся численный ряд – убывающая арифметическая прогрессия (разность любых последовательных амплитуд одинакова).

Таблица 1.12

Результаты моделирования для последовательности амплитуд при сухом трении

$\varphi_m(0)$ , град	$\varphi_m\left(\frac{T}{2}\right)$ , град	$\varphi_m(T)$ , град	$\varphi_m\left(3\frac{T}{2}\right)$ , град	$\varphi_m(2T)$ , град	$\varphi_m\left(5\frac{T}{2}\right)$ , град
120					

**4.4.** Изучить фазовую траекторию осциллятора. Найти точку остановки.

Зайти в раздел «Фазовая траектория». В панели ввода ввести для зоны застоя  $\varphi_3 = 5^\circ$ ; задать  $\varphi(0) = 55^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав «Пуск», заносить с экрана в таблицу 1.13 величины максимальных отклонений ротора в каждую сторону каждые полпериода. Записать угол остановки маховика  $\varphi_{ост}$  и число половин эллипсов  $N$  в получившейся фазовой траектории.

Провести моделирование при других зонах застоя и начальных углах, указанных в табл. 1.13.

Таблица 1.13

Результаты моделирования фазовой траектории колебаний при сухом трении

Начальные условия		Результаты моделирования						
$\varphi_3$ , град	$\varphi_m(0)$ , град	$\varphi_m\left(\frac{T}{2}\right)$ , град	$\varphi_m(T)$ , град	$\varphi_m\left(3\frac{T}{2}\right)$ , град	$\varphi_m(2T)$ , град	$\varphi_m\left(5\frac{T}{2}\right)$ , град	$\varphi_{ост}$ , град	$N$
5	55							
10	120							
30	160							

**4.5.** Найти максимальный угол отклонения ротора, выведенного из положения равновесия начальным толчком при сухом трении.

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода ввести  $\varphi_3 = 15^\circ$ ,  $\varphi(0) = 0$  и начальную угловую скорость маховика  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 2$  рад.

Провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.14 максимальный угол отклонения  $\varphi_{max}$  и угол остановки маятника  $\varphi_{ост}$ .

Таблица 1.14

Результаты наблюдения колебаний маятника при сухом трении, выведенного из положения равновесия начальным толчком

Начальные условия		Результаты моделирования		Результаты расчетов
$\varphi_3$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_{\max}$ , град	$\varphi_{ост}$ , град	$\varphi_{\max}$ , рад
15	2			
10	1			
5	3			

Провести моделирование при других зонах застоя и начальных угловых скоростях, заданных в табл. 1.14. Переведя полуширину зоны застоя в радианы, рассчитать теоретически максимальный угол отклонения маховика для каждого опыта по формуле

$$\varphi_{\max} = \sqrt{\varphi_3^2 + \frac{\dot{\varphi}^2(0)}{\omega_0^2}} - \varphi_3 . \quad (1.31)$$

Заполнить результатами расчетов последний столбец таблицы 1.14.

#### 4.6. Изучить колебательное движение маятника при сухом трении.

В панели ввода параметров задать  $\varphi_3 = 15^\circ$ . Ввести  $\varphi(0) = 135^\circ$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1,5$  рад. Провести моделирование.

Записать с экрана в таблицу 1.15 максимальный угол отклонения  $\varphi_{\max}$  и угол останова ротора  $\varphi_{ост}$ . Провести моделирование при другом начальном угле отклонения ротора  $\varphi(0) = -135^\circ$ . Рассчитать максимальный угол отклонения в радианах по формуле (1.31) и заполнить табл. 1.15.

Таблица 1.15

Результаты наблюдения колебаний маятника при сухом трении

Начальные условия		Результаты моделирования		Результаты расчетов
$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_{\max}$ , град	$\varphi_{\text{ост}}$ , град	$\varphi_{\max}$ , рад
135	1,5			
-135	1,5			

**4.7.** Изучить процесс уменьшения энергии колебаний со временем. Обратить внимание на отличия временных зависимостей энергии колебаний при сухом и при вязком трении.

Зайти в раздел «Превращения энергии». На панели ввода: а) ввести для сухого трения  $\varphi_3 = 0^\circ$ ; б) ввести «Вязкое трение»; в)  $Q = 10$ ; г) задать  $\varphi(0) = 90^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Провести моделирование нажатием клавиши «Пуск». Результаты наблюдений вида функций для кинетической энергии  $E_k(t)$ , потенциальной энергии  $E_n(t)$  и полной энергии колебаний  $E(t)$  занести в таблицу 1.16.

Таблица 1.16

Результаты моделирования для энергии затухающих колебаний маятника

Вид функций колебаний при вязком трении, $Q = 10$			Вид функций колебаний при сухом трении $\varphi_3 = 10^\circ$		
для $E_k(t)$	для $E_n(t)$	для $E(t)$	для $E_k(t)$	для $E_n(t)$	для $E(t)$

На панели ввода параметров: а) убрать «Вязкое трение»; б) ввести для сухого трения  $\varphi_3 = 10^\circ$ ; в) задать  $\varphi(0) = 90^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Заполнить табл. 1.16.

**4.8.** Изучить движение ротора при одновременном действии сухого и вязкого трения. Оценить время перехода маховика в состояние покоя при критическом затухании.

Зайти в раздел «Фазовая траектория». В панели ввода: а) задать «Вязкое трение»; б) ввести  $Q = 0,51$ ; в) задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1,5$  рад; г) ввести для сухого трения  $\varphi_s = 15^\circ$ . Провести моделирование, записав с экрана в табл. 1.17 максимальный угол отклонения  $\varphi_{\max}$  и угол остановки ротора  $\varphi_{\text{ост}}$ .

Таблица 1.17

Результаты моделирования колебаний при критическом затухании и сухом трении

Начальные условия	Результаты моделирования	
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_{\max}$ , град	$\varphi_{\text{ост}}$ , град
1,5		
2,5		
3,5		

Провести моделирование для других начальных данных таблицы. Оценить время  $t_1$ , за которое маятник перейдет в состояние покоя, в единицах периода незатухающих колебаний  $T_0$  по формуле

$$\frac{t_1}{T_0} = \frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{4Q^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.32)$$

## 5. Контрольные вопросы

1. Напишите и объясните дифференциальное уравнение колебаний торсионного осциллятора при наличии в системе только вязкого трения.

2. Запишите дифференциальное уравнение колебаний осциллятора с сухим трением. Поясните входящие в уравнение величины.
3. Поясните термины « $Z$ -характеристика сухого трения», «зона застоя».
4. Как влияет сухое трение на точность измерения стрелочных приборов?
5. Для чего проводят демпфирование стрелочных приборов?

# Лабораторная работа № 3

## КОЛЕБАНИЯ И ПЕРЕВОРОТЫ ЖЕСТКОГО МАЯТНИКА

### 1. Цель работы

Изучить колебания и перевороты жесткого маятника.

### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста. Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 1 и описание работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 1.18

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения маятника
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость маятника в относительных единицах частоты
$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$	Максимальная угловая скорости маятника в относительных единицах частоты
$Q$	Добротность (при вязком трении среды)

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают колебания и перевороты жесткого маятника (рис. 1.5). Он состоит из точечной массы  $m$ , закрепленной на невесомом твердом стрержне. Центр масс маятника расположен ниже точки подвеса на расстоянии  $a$ . Колебания

жесткого маятника аналогичны колебаниям линейного осциллятора при малых углах отклонения  $\varphi$ . В частности, в отсутствие трения, он совершает гармонические колебания.

При больших углах  $\varphi$  колебания маятника уже не являются гармоническими: период зависит от величины амплитуды, графики колебаний отличаются от синусоиды. При этом маятник поочередно зависает по обе стороны от точки 0: большую часть цикла стержень с грузом находится в окрестностях точек максимального смещения (точек поворота).

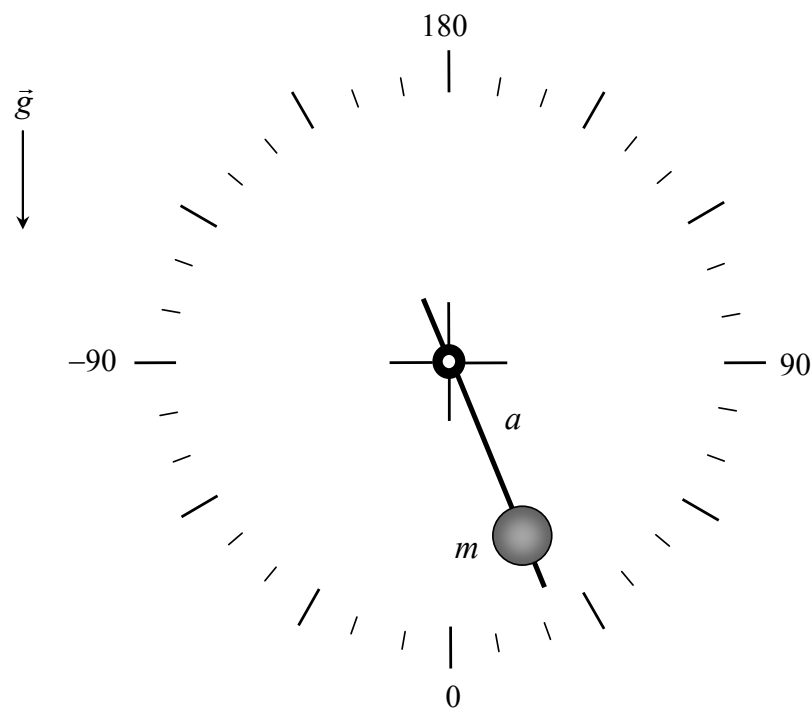


Рис. 1.5. Жесткий маятник: груз (материальная точка) на невесомом твердом стержне

Потенциальная энергия маятника в перевернутом положении равна:

$$E_{n,\max} = 2mga. \quad (1.33)$$

Если возбудить маятник сильным толчком, то полная энергия колебаний  $E$  будет больше этой величины  $E > 2mga$ . Тогда в перевернутом положении при отклонении маятника на угол  $\varphi = \pm\pi$  его угловая скорость окажется



больше нуля, и он будет совершать *перевороты* – вращения в вертикальной плоскости. При вязком трении перевороты переходят в затухающие колебания относительно точки 0 (положения равновесия).

#### 4. Порядок выполнения работы

**4.1.** Изучить незатухающие колебания маятника при сравнительно небольших амплитудах.

**4.1.1.** Зайти в раздел «Графики колебаний». Провести моделирование колебаний маятника из состояния покоя ( $\dot{\varphi}(0) = 0$ ), задавая амплитуду  $\varphi_m$ .

На панели ввода параметров убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение», задать  $\varphi(0) = 10^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.19 значение  $\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ . Повторить моделирование для других углов, указанных в таблице.

Для каждого опыта перевести амплитуду из градусов в радианы ( $\varphi_m = \varphi(0)$ ) и рассчитать величины:

$$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0} = \sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)} . \quad (1.34)$$

Заполнить табл. 1.19. Сравнить данные моделирования и расчетов.

Таблица 1.19

Результаты моделирования незатухающих колебаний маятника из состояния покоя

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ , рад	$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ , рад
10		
20		
30		

**4.1.2.** Провести моделирование колебаний маятника начальным толчком ( $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ ) из положения равновесия.

На панели ввода параметров задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 0,524$  рад.

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.20 значение для амплитуды  $\varphi_m$  в градусах. Повторить моделирование для других начальных угловых скоростей, указанных в таблице.

Перевести амплитуду в радианы и рассчитать все величины (1.34). Заполнить табл. 1.20. Сравнить данные моделирования и расчетов.

Таблица 1.20

Результаты моделирования незатухающих колебаний маятника из положения равновесия начальным толчком

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_m$ , град	$\varphi_m$ , рад	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад
0,524			
0,262			
0,087			

**4.1.3.** Изучить превращения энергии незатухающих колебаний маятника.

Зайти в раздел «Превращения энергии». Провести моделирование колебаний начальным толчком маятника из положения равновесия: на панели ввода ввести  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 0,175$  рад. Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.21 значение для амплитуды  $\varphi_m$  в градусах. Повторить моделирование при других начальных условиях, указанных в таблице.

Для каждого опыта: 1) перевести амплитуду в радианы; 2) посчитать отношение полной механической энергии колебаний  $E$  к потенциальной энергии маятника в положении равновесия  $E_n = mga$ :

$$\frac{E}{mga} = 1 - \cos \varphi_m ; \quad (1.35)$$

3) рассчитать приближенные выражения для отношения максимальной энергии колебаний  $E_{\max}$  и потенциальной энергии маятника в положении равновесия  $E_n = mga$ :

$$\frac{E_{\max}}{mga} \approx \frac{\varphi_{\max}^2}{2} . \quad (1.36)$$

Заполнить таблицу 1.21.

Таблица 1.21

Результаты моделирования энергетических превращений незатухающих колебаний

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов		
		$\varphi_m$ , рад	$\frac{E}{mga}$	$\frac{E_{\max}}{mga}$
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\varphi_m$ , град	$\varphi_m$ , рад		
0,175				
0,349				
0,524				

#### 4.2. Изучить изменение периода незатухающих колебаний маятника.

При колебаниях с большими амплитудами маятник «зависает» в крайних точках. Проводя моделирование, обратить внимание на то, что период колебаний  $T$  с произвольной амплитудой  $\varphi_m$  превышает период колебаний  $T_0$  с малой амплитудой (порядка нескольких градусов).

Зайти в раздел «Физическая система». На панели ввода задать  $\varphi(0) = 30^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . На экран выводится время колебаний в относительных единицах:  $t/T_0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести опыт.

Остановить колебания, нажав «Пауза» в тот момент, когда маятник совершит целое число циклов колебаний (это число высветится на экране). Записать в табл. 1.22 показания текущего времени таймера колебаний  $t/T_0$ , число циклов  $n$  и результат моделирования  $\frac{T}{T_0} > 0$ , найдя его как отношение  $\frac{t/T_0}{n}$ .

Нажать кнопку «Сброс таймера». Провести моделирование для других углов  $\varphi(0)$ , указанных в таблице.

Таблица 1.22

Период незатухающих колебаний маятника

Начальные условия	Результаты моделирования			Результаты расчетов		
	Показания таймера	$n$	$\frac{T}{T_0}$	$\varphi_m$ , рад	$\frac{T}{T_0}$	$\varepsilon_T$ , %
30						
45						
60						
90						
120						

Для каждого опыта: 1) перевести амплитуду колебаний в радианы ( $\varphi_m = \varphi(0)$ ); 2) рассчитать теоретическое значение для отношения периода колебаний с амплитудой  $\varphi_m$  и периода колебаний с малой амплитудой

$$\frac{T}{T_0} \approx 1 + \frac{\varphi_m^2}{16}; \quad (1.37)$$

3) найти относительное отклонение результатов моделирования и расчетов:

$$\varepsilon_T (\%) = \frac{T_{\text{мод}} - T_{\text{расч}}}{T_{\text{мод}}} \cdot 100\% . \quad (1.38)$$

**4.3.** Изучить затухающие колебания маятника при сравнительно небольших амплитудах.

Зайти в раздел «Графики колебаний». Провести моделирование колебаний из состояния покоя, сообщая маятнику начальное отклонение.

На панели ввода параметров: 1) ввести «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать добротность  $Q = 13,6$ ; 3) ввести  $\varphi(0) = 30^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. По графику угла найти число циклов колебаний маятника  $N_{1/2}$ , за которые размах колебаний (т. е. условная амплитуда) уменьшится в два раза с  $30^\circ$  до  $15^\circ$ . Записать в таблицу 1.23 найденное число  $N_{1/2}$ .

Таблица 1.23

Результаты моделирования затуханий маятника

Начальные условия	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$Q$	$N_{1/2}$	$Q$
13,6		
18,1		
22,7		
27,2		

Провести моделирование при других добротностях. Рассчитать значение добротности по найденному числу  $N_{1/2}$ :

$$Q = \frac{N_{1/2}\pi}{\ln 2} . \quad (1.39)$$

Заполнить табл. 1.23. Сравнить заданные и расчетные величины.

Перейти в раздел «Фазовая траектория». В панели ввода ввести  $Q = 18,1$ . Провести моделирование. Какую форму (спираль или кривую линию) имеет фазовая траектория? Какой тип (фокус или узел) имеет особая точка фазовой траектории – начало координат? Результаты наблюдений записать в табл. 1.24.

Таблица 1.24

Результаты моделирования затуханий маятника

$Q$	Форма фазовой траектории	Тип особой точки (начала координат)
18,1		
0,5		
0,1		

Провести опыты при критическом ( $Q = 0,5$ ) и сверхкритическом затухании ( $Q = 0,1$ ). Будет ли колебаться маятник в этих случаях? Сделать вывод по результатам наблюдений. Заполнить таблицу.

**4.4.** Изучить незатухающие колебания маятника при больших амплитудах.

**4.4.1.** В разделе «Графики колебаний» изучить формы графиков угла  $\varphi(t)$ , угловой скорости  $\dot{\varphi}(t)$ , фазовой траектории.

Обратить внимание на то, что форма графиков изменяется при увеличении начального угла  $\varphi(0)$ : вершины графиков  $\varphi(t)$  становятся более плоскими (при максимальном отклонении маятника от положения равновесия), а вершины графиков  $\dot{\varphi}(t)$  становятся более острыми (в положениях равновесия).

На панели ввода убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение», задать  $\varphi(0) = 100^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование.

Таблица 1.25

Результаты моделирования затухающих колебаний маятника

$\varphi(0)$ , град	Форма графика $\varphi(t)$	Форма графика $\dot{\varphi}(t)$	Форма фазовой траектории
100			
130			
170			

Результаты моделирования при всех начальных углах записать во второй и третий столбец табл. 1.25.

В разделе «Фазовая траектория» с теми же начальными углами изучить изменение формы фазовой траектории маятника – эллипса, который при увеличении угла  $\varphi(0)$  вытягивается в горизонтальном направлении. Результаты наблюдений занесите в табл. 1.25.

**4.4.2.** В разделе «Преобразования энергии» изучить графики кинетической  $E_{\kappa}(t)$  и потенциальной  $E_n(t)$  энергий маятника.

Обратить внимание на то, что формы кривых энергий при больших амплитудах отличаются от синусоидального вида. Широкие плоские вершины кривых  $E_n(t)$  разделены узкими впадинами. Формы графиков  $E_n(t)$  также изменяются при увеличении начального угла  $\varphi(0)$ : вершины становятся все более плоскими, а впадины – все более узкими. Кривая  $E_{\kappa}(t)$  – зеркальное отражение кривой  $E_n(t)$  по отношению к оси времени.

Средняя кинетическая энергия маятника при больших амплитудах меньше его средней потенциальной энергии, так как он «зависает» в крайних положениях (при максимальных отклонениях от положения равновесия). Однако максимальные величины этих энергий равны  $E_{\kappa}^{\max} = E_n^{\max}$  и равны полной механической энергии колебаний  $E$ :

$$E = E_n(t) + E_{\kappa}(t) = mga \left( 1 - \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} \right)^2 \right). \quad (1.40)$$

Провести моделирование при начальных условиях из табл. 1.26. Рассчитать отношение полной механической энергии к потенциальной энергии маятника в положении равновесия  $E_n = mga$ , используя формулу (1.40).

Результаты моделирования затуханий маятника

Начальные условия		Результаты расчетов
$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	$\frac{E}{mga}$
110	1	
120	0,95	
130	0,8	

**4.4.3.** Изучить изменение периода колебаний маятника при больших амплитудах  $\varphi_m \rightarrow \pi$ .

В колебаниях с большими амплитудами маятник «зависает» – довольно долго находится в крайних положениях. Период колебаний маятника  $T$  с амплитудой  $\varphi_m \rightarrow \pi$  оказывается больше периода колебаний  $T_0$  с малой амплитудой (несколько градусов). Их отношение можно оценить с помощью выражения:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m} . \quad (1.41)$$

Выбрать раздел «Физическая система». В панели ввода параметров задать  $\varphi(0) = 179,9^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Нажав кнопку «Пуск», провести опыт. Остановить колебания кнопкой «Пауза» в тот момент, когда маятник совершит целое число циклов колебаний. Записать в табл. 1.27 показания текущего времени в относительных единицах  $t/T_0$ , число циклов  $n$  и результат моделирования  $\frac{T}{T_0}$ , найдя его как отношение показаний  $t/T_0$  к числу  $n$ .

Нажать кнопку «Сброс таймера». Провести моделирование для других углов  $\varphi(0)$ , указанных в таблице. Для каждого опыта: 1) перевести амплитуду колебаний в радианы ( $\varphi_m = \varphi(0)$ ); 2) рассчитать все отношения (1.41). Сравнить результаты моделирования и расчетов.



Таблица 1.27

Период незатухающих колебаний маятника при  $\varphi_m \rightarrow \pi$ 

Начальные условия	Результаты моделирования			Результаты расчетов	
	Показания таймера	$n$	$\frac{T}{T_0}$	$\varphi_m$ , рад	$\frac{T}{T_0}$
179,9					
179,99					
179,999					

**4.5.** Изучить затухающие колебания маятника при больших амплитудах  $\varphi_m \rightarrow \pi$ .

Зайти в раздел «Графики колебаний». На панели ввода: 1) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и задать  $Q = 20$ ; 2) ввести  $\varphi(0) = 179,9^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Описать форму графиков угла  $\varphi(t)$  в табл. 1.28. Провести моделирование при других  $Q$ .

Перейти в раздел «Фазовая траектория». В панели ввода параметров ввести  $Q = 20$ . Провести моделирование. Какую форму (систему кривых линий или спираль) имеет фазовая траектория маятника? Результаты наблюдений запишите в табл. 1.28.

Таблица 1.28

Результаты моделирования затуханий маятника при  $\varphi_m \rightarrow \pi$ 

$Q$	Форма графика $\varphi(t)$	Форма фазовой траектории
20		
10		
5		

Провести опыты при других  $Q$ . Заполнить таблицу.

**4.6.** Изучить перевороты и вращения маятника, выведенного из положения равновесия начальным толчком. Трением пренебречь.

Перевороты маятника с последующим вращением в вертикальной плоскости возможны тогда, когда полная механическая энергия маятника больше его максимальной потенциальной энергии в перевернутом положении  $E > E_{n,\max} = 2mga$ . Из-за поля тяготения вращения маятника происходят неравномерно: угловая скорость максимальна в моменты, когда маятник проходит нижнее положение равновесия, и минимальна, когда он проходит верхнее положение.

Зайти в раздел «Графики колебаний». На панели ввода убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение», задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 2$  рад.

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать в таблицу 1.29 результаты наблюдений для типа движений: колебаний или переворотов с дальнейшим вращением маятника.

Провести моделирование с другими начальными скоростями. Найти минимальное значение угловой скорости маятника в верхнем положении:

$$\frac{\dot{\varphi}_{\min}}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\dot{\varphi}^2(0)}{\omega_0^2} - 4} . \quad (1.42)$$

Заполнить табл. 1.29. Сделать выводы.

Таблица 1.29

Результаты наблюдений за движениями маятника

$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Тип движения маятника	$\frac{\dot{\varphi}_{\min}}{\omega_0}$
2		
2,1		
2,2		
2,3		

В разделах «Фазовая траектория» и «Преобразования энергии» провести моделирование с теми же начальными данными. Убедиться в сложности получающихся кривых для фазовой траектории и энергии.

**4.7.** Изучить перевороты и вращения маятника при наличии трения.

Если начальным толчком вывести маятник из положения равновесия, то при трении его перевороты скоро переходят в затухающие колебания.

Зайти в раздел «Графики колебаний». На панели ввода задать «Вязкое трение» и  $Q = 20$ ;  $\varphi(0) = 0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 2,11$  рад. Провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 1.30 результаты наблюдений: 1) число переворотов; 2) максимальный угол отклонения затухающих колебаний.

Провести моделирование при других начальных угловых скоростях, указанных в таблице. В разделах «Фазовая траектория» и «Преобразования энергии» провести опыты с теми же начальными данными. Проследить за построением кривых фазовой траектории и для механической энергии.

Таблица 1.30

Результаты наблюдений переворотов и затуханий маятника при наличии трения

Начальные условия	Результаты наблюдений	
	Число переворотов	$\varphi_{\max}$ , град
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$		
2,11		
2,22		
2,34		
2,44		

## 5. Контрольные вопросы

1. Объясните различные типы движений жесткого маятника в поле тяготения: гармонические колебания, затухающие колебания, перевороты.
2. Чему равна потенциальная энергия перевернутого маятника?
3. В каких случаях маятник совершает перевороты?
4. Как влияет вязкое трение среды на перевороты маятника?
5. Что происходит с периодом колебаний маятника при увеличении амплитуды колебаний?
6. Что называют фазовой траекторией колебаний? Какие типы особых точек на фазовой плоскости колебаний осциллятора вам известны?

## РАЗДЕЛ 2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

#### Физическая система

Собственные колебания всех реальных систем с течением времени затухают из-за отрицательной работы сил трения или сил сопротивления среды, приводящей к уменьшению энергии колебаний. Чтобы колебания системы не затухали, необходимо компенсировать потери энергии колебаний работой сил внешних устройств или механизмов.

*Вынужденными колебаниями* называют такие колебания, которые происходят в системе под действием внешних сил. Примером таких колебаний являются: колебания качелей, раскачиваемых и поддерживаемых усилиями человека; незатухающие колебания маятников при периодическом подталкивании со стороны внешних устройств; незатухающие колебания напряжения на конденсаторе в электрическом колебательном контуре с внешним источником переменного ЭДС и др.

При рассмотрении вынужденных колебаний удобно пользоваться моделью линейного или гармонического осциллятора (Раздел 1, стр. 5), совершающего колебания под действием внешней периодической силы. Если внешняя сила, вызывающая и поддерживающая колебания, периодична с частотой  $\omega$ , то физические величины, описывающие колебания системы, зависят от амплитуды внешней силы и частоты  $\omega$  и также изменяются со временем по гармоническому закону косинуса или синуса.

Для изучения вынужденных колебаний в лабораторных работах используют также торсионный пружинный осциллятор, совершающий

колебания при внешнем механическом воздействии. Его устройство напоминает балансовый механизм часов и изображено на рис. 2.1.

Осциллятор состоит из уравновешенного маховика (ротора) и сцепленной с ним спиральной пружиной. Второй конец пружины соединен со стержнем (так называемым шатуном). Шатун может принудительно поворачиваться относительно общей с маховиком оси. При повороте стержня влево или вправо относительно точки 0 на некоторый угол положение равновесия ротора также смещается. Периодические движения шатуна заставляют ротор раскачиваться.

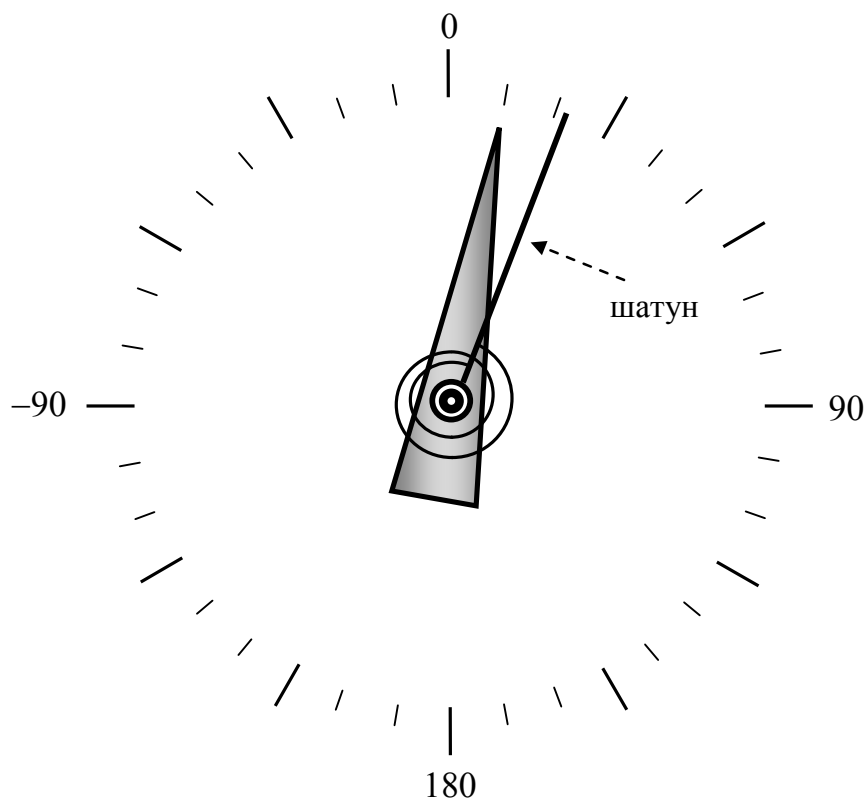


Рис.2.1. Торсионный пружинный осциллятор с шатуном

Физические величины, характеризующие вынужденные колебания торсионного осциллятора: момент инерции маховика  $J$ , постоянная пружины  $D$  (модуль кручения), частота колебаний стержня  $\omega$ , постоянная затухания  $\gamma$  (с учетом вязкого трения среды).

## Уравнение вынужденных колебаний

Пусть стержень принудительно совершает гармонические колебания относительно среднего положения (точки 0 на рис.2.1) с амплитудой  $\phi_0$  и циклической частотой  $\omega$ :

$$\phi = \phi_0 \sin \omega t . \quad (2.1)$$

Предположим, что силы вязкого трения среды пренебрежимо малы. Тогда, если в момент времени  $t$  маховик осциллятора смещен от среднего положения на угол  $\varphi$ , а шатун – на угол  $\phi$ , то со стороны пружины на маховик действует момент сил  $N = -D(\varphi - \phi)$ . Применим к маховику, движущемуся с угловым ускорением  $\varepsilon$ , основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твердого тела  $N = J\ddot{\varphi}$ .

С учетом (2.1), запишем закон динамики вращательного движения маховика без трения среды:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \phi) = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t . \quad (2.2)$$

Разделим обе части (2.2) на момент инерции маховика. Вводя обозначение для квадрата собственной частоты незатухающих колебаний осциллятора  $\omega_0^2 = \frac{D}{J}$ , получим дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний ротора:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t . \quad (2.3)$$

Здесь введено обозначение:  $\ddot{\varphi} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \varepsilon$  – угловое ускорение осциллятора.

Если силы вязкого трения среды довольно велики, и ими пренебречь нельзя, то с учетом тормозящего момента силы, пропорционального угловой скорости маховика  $\dot{\varphi}$  (см. стр. 9), дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t . \quad (2.4)$$

Система не всегда сразу при включении внешнего воздействия начинает совершать вынужденные осцилляции. Чаще всего в системе сначала можно наблюдать *переходный процесс* — это довольно длительный и сложный процесс установки вынужденных колебаний.

Сначала отклонения стержня вызывают собственные затухающие колебания ротора относительно точки 0. Во время переходного процесса собственные затухающие колебания накладываются на вынуждающие колебания шатуна до тех пор, пока не установятся колебания ротора с постоянной амплитудой и частотой, которая равна частоте возбуждающих колебаний стержня.

### Установившиеся колебания

Решением дифференциального уравнения (2.4) является закон для установившихся колебаний угла маховика  $\varphi$  как функции времени  $t$  с запаздыванием по фазе на величину  $\delta$  от колебаний внешней силы:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t - \delta) . \quad (2.5)$$

Амплитуда вынужденных колебаний  $a$  зависит от величин амплитуды  $\phi_0$  и циклической частоты  $\omega$  колебаний шатуна. В случае пренебрежимо малого трения она равна:

$$a = \frac{2\omega_0^2 \phi_0}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (2.6)$$

Если трение существенно, тогда величина  $a$  и запаздывание по фазе  $\delta$  также зависят от коэффициента затухания  $\gamma$ :

$$a = \frac{2\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} , \quad \text{tg} \delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} . \quad (2.7)$$

Можно наблюдать явление *резонанса* – вынужденные колебания с максимально возможной амплитудой (резонансной амплитудой  $a_p$ ) при определенной (резонансной) частоте  $\omega_p$  вынуждающей силы:



$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad a_p = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (2.8)$$

При малом трении ( $\gamma \ll \omega_0$ ), используя соотношение для добротности  $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ , из (2.8) можно получить приближенные выражения для резонансной частоты и резонансной амплитуды:

$$\omega_p = \omega_0 \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right), \quad (2.9)$$

$$a_p = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{\omega_0 \phi_0}{\gamma \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{2Q\phi_0}{1 - \frac{1}{8Q^2}}. \quad (2.10)$$

Потенциальная энергии  $E_p$  и кинетической энергия  $E_k$  маховика при установившихся вынужденных колебаниях изменяются с частотой  $2\omega$  и колеблются в противофазе. Отношение их максимальных (как и средних) значений равно отношению квадрата частот собственных и вынужденных колебаний:

$$\frac{E_{p \max}}{E_{k \max}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (2.11)$$

При низких возбуждающих частотах шатуна  $\omega < \omega_0$  основной вклад в механическую энергию колебаний вносит потенциальная энергия пружины. Напротив, когда частота вынуждающих колебаний стержня чуть больше частоты собственных колебаний  $\omega > \omega_0$ , величину механической энергии колебаний определяет, в основном, кинетическая энергия маховика.

При очень высокой частоте возбуждения инертный маховик не успевает следовать за быстрыми отклонениями стержня. В этом случае ротор совершает малые колебания около точки 0 с размахом, который гораздо меньше амплитуды колебаний шатуна  $\phi_0$ .

## Переходные процессы

Раскачка вынужденных колебаний происходит в течение *переходного процесса*, который происходит с начала момента действия на осциллятор внешней силы. Начальные условия – угол отклонения  $\varphi(0)$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}(0)$  осциллятора при  $t = 0$  – влияют на длительность переходного процесса.

В переходном процессе происходит наложение собственных затухающих колебания осциллятора с частотой  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  и переменной амплитудой  $Ce^{-\gamma t}$  и гармонических колебаний вынуждающей силы (принудительных движений шатуна) с постоянной амплитудой  $\phi_0$  и частотой  $\omega$ :

$$\varphi(t) = Ce^{-\gamma t} \cos \omega_1 t + a \sin(\omega t - \delta) . \quad (2.12)$$

Длительность переходного процесса тем больше, чем меньше трение в системе. Переходный процесс с течением времени постепенно переходит в вынужденные колебания, когда амплитуда собственных колебаний  $Ce^{-\gamma t}$  из-за трения становится пренебрежимо малой. В дальнейшем в системе будут наблюдаться установившиеся колебания ротора с постоянной амплитудой  $a$  и частотой, равной частоте внешнего воздействия  $\omega$ .

Можно задать такие начальные условия, при которых осциллятор сразу начнет вынужденно колебаться без переходного процесса. Для этого необходимо, чтобы начальный угол отклонения осциллятора и его начальная угловая скорость были равны:

$$\varphi(0) = -a \sin \delta , \quad \dot{\varphi}(0) = a \omega \cos \delta . \quad (2.13)$$

В этом случае собственные колебания осциллятора на частоте  $\omega_1$  после включения внешнего воздействия вообще не возникают ( $C = 0$  в (2.12)), и осциллятор с самого начала совершает вынужденные колебания. Величины для амплитуды  $a$  и запаздывания по фазе  $\delta$  в уравнении (2.13) задаются выражениями (2.7).

В случае малого трения, когда частота внешней силы близка по величине к резонансной частоте  $\omega_p$  (см. (2.9)), переходный процесс в системе представляет собой *биения* – колебания с медленно меняющейся амплитудой, которые образуются при наложении колебаний шатуна и колебаний ротора близких частот. В переходном процессе при нулевых начальных условиях

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

амплитуда биений осциллятора  $b(t)$  медленно нарастает со временем по закону

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\omega_0}{2\gamma} \phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \approx \frac{1}{2} \phi_0 \omega_0 t. \quad (2.14)$$

Когда частота возбуждения много меньше частоты собственных колебаний осциллятора  $\omega \ll \omega_0$ , положения равновесия маховика смещаются вместе с медленными колебаниями шатуна. В этом случае на начальной стадии переходного процесса происходят быстрые малые колебания ротора относительно меняющихся положений равновесия. С течением времени быстрые колебания ротора прекращаются, переходя в медленные вынужденные колебания с постоянной амплитудой на частоте вынуждающей силы.

В начале переходного процесса при большой частоте возбуждения ( $\omega \gg \omega_0$ ) быстрые вынужденные колебания шатуна накладываются на медленные собственные колебания маятника. В результате этого со временем устанавливаются малые колебания ротора с амплитудой, которая оказывается меньше амплитуды возбуждающих колебаний стержня  $\phi_0$ .

### Электромагнитный аналог

Рассмотрим электрические колебания в электрическом колебательном  $LCR$ -контуре (рис. 2.2), на вход которого подают переменное напряжение  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ .

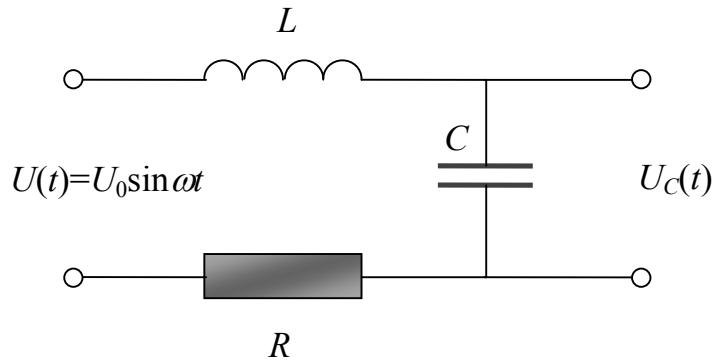


Рис. 2.2. Электрический колебательный контур с внешним источником переменного напряжения

Вынужденные колебания заряда  $q$  описывает такое же по виду дифференциальное уравнение, что и уравнение для колебаний угла отклонения маховика  $\varphi$ , происходящих в торсионном осцилляторе из-за периодических отклонений стрелки – шатуна.

Закон изменения колебаний заряда на конденсаторе задает выходное напряжение контура  $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ . Алгебраическая сумма напряжений  $U_C$ ,  $U_L$ , и  $U_R$  на отдельных элементах замкнутого контура с током равна внешнему напряжению  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  в любой момент времени:

$$U_C + U_L + U_R = U_0 \sin \omega t . \quad (2.15)$$

Подставляя в (2.14)  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $U_L = L \frac{dI}{dt} = L\ddot{q}$  и  $U_R = IR = \frac{dq}{dt} R = \dot{q}R$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора  $q$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U_0 \sin \omega t . \quad (2.16)$$

Вводя обозначения  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $2\gamma = R/L$ , перепишем (2.16):

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \sin \omega t = \omega_0^2 C U_0 \sin \omega t . \quad (2.17)$$

Дифференциальное уравнение (2.17) совпадает по виду с точностью до обозначений с уравнением (2.4) для угла отклонения  $\varphi$  ротора механического осциллятора.

В таблице 2.1 приведена аналогия между физическими величинами колебаний для механического и электромагнитного осцилляторов. Благодаря этой аналогии, для понимания закономерностей изменений напряжений на участках в электрическом колебательном контуре можно использовать модель вынужденных механических колебаний.

Таблица 2.1

Аналогия между физическими величинами вынужденных колебаний механического и электромагнитного осцилляторов

Угол отклонения шатуна $\phi = \phi_0 \sin \omega t$	Входное напряжение контура – внешнее напряжение $U(t) = U_0 \sin \omega t$
Угол отклонения ротора $\varphi$	Заряд на конденсаторе $q(t) = CU_C(t)$
Угловая скорость ротора $\dot{\varphi}$	Величина тока в контуре $I = \dot{q}$
Сила вязкого трения среды	Электрическое сопротивление материала
Потенциальная энергия пружины $E_p = \frac{D\varphi^2}{2}$	Энергия электрического поля заряженного конденсатора $E_C = \frac{Cq^2}{2}$
Кинетическая энергия движения ротора $E_k = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$	Энергия магнитного поля катушки индуктивности $E_L = \frac{LI^2}{2}$

Колебания заряда на конденсаторе запаздывают по фазе от колебаний внешнего напряжения и происходят на его частоте. Уравнения для вынужденных колебаний заряда, амплитуды заряда и

фазы запаздывания имеют такой же вид, что и уравнения (2.5) – (2.7) с соответствующей заменой величин.

В случае малого электрического сопротивления величина добротности определяется выражением  $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . При резонансе напряжений максимальная (резонансная) амплитуда выходного напряжения на конденсаторе приближенно равна  $U_{Cp} \approx QU_0$  и в зависимости от величины добротности  $Q$  может значительно превосходить амплитуду входного напряжения  $U_0$ .

## Лабораторная работа № 4

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

#### 1. Цель работы

Изучить вынужденные колебания линейного осциллятора.

#### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста. Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 2 и описание работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 2.2

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения ротора
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость ротора
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость в относительных единицах собственной частоты ротора
$\phi_0$	Амплитуда колебаний шатуна
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	Частота возбуждения (частота колебаний шатуна) в единицах собственной частоты ротора
$a$	Установившаяся амплитуда вынужденных колебаний маховика
$Q = 5$	Добротность системы (при наличии трения)
$x_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}$	Резонансная частота возбуждения шатуна в единицах собственной частоты маховика

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают вынужденные колебания линейного осциллятора на примере торсионного пружинного осциллятора, ротор которого совершает колебания под действием периодических движений стержня – шатуна (рис. 2.1).

### 4. Порядок выполнения работы

**4.1.** Изучить установившиеся вынужденные колебания осциллятора.

Установившиеся вынужденные колебания осциллятора происходят с частотой  $\omega$  внешнего источника – шатуна, вызывающего колебания ротора. Принудительные колебания шатуна происходят с амплитудой  $\phi_0$ .

В разделе «Графики колебаний» на панели «Условия моделирования» выбрать опцию «Установившиеся колебания».

**4.1.1.** Изучить установившиеся колебания осциллятора без трения.

В этом случае не равны: 1) период установившихся вынужденных колебаний  $T$  и период собственных колебаний  $T_0$  ротора; 2) средние по периоду кинетическая  $\langle E_k \rangle$  и потенциальная энергии  $\langle E_n \rangle$  маховика.

Зайти в раздел «Графики колебаний».

В панели ввода параметров: 1) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать частоту возбуждения шатуна  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,707$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения (амплитуду шатуна)  $\phi_0 = 15^\circ$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 2.3 величину установившейся амплитуды  $a$  вынужденных колебаний маховика. Повторить моделирование при других  $x$  и  $\phi_0$ , указанных в табл. 2.3.



В разделе «Фазовая траектория» провести моделирование с одним из наборов  $x$  и  $\phi_0$ . Какую форму имеет фазовая траектория осциллятора при установившихся колебаниях? Ответ занести в отчет.

В разделе «Превращения энергии» пронаблюдать за процессом передачи энергии колебаний шатуна колебаниям ротора. Заполнить таблицу 2.3, рассчитав для каждого опыта отношения:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\langle E_n \rangle}{\langle E_k \rangle} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x^2. \quad (2.18)$$

Таблица 2.3

Результаты моделирования установившихся колебаний без трения

Параметры системы		Результаты моделирования	Результаты расчетов	
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\phi_0$ , град	$a$ , град	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\langle E_n \rangle}{\langle E_k \rangle}$
0,707	15			
1,225	30			
1,414	45			
1,732	60			
3,5	90			

#### 4.1.2. Изучить установившиеся резонансные колебания осциллятора.

В данном случае вынужденные колебания ротора происходят с максимально возможной (резонансной) амплитудой  $a_p$  при резонансной частоте возбуждения шатуна  $\omega_p$ .

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода параметров: 1) задать резонансную частоту  $x_p = \frac{\omega_p}{\omega_0} = 0,99$ ; 2) ввести амплитуду шатуна  $\phi_0 = 12^\circ$ ; 3) установить «Вязкое трение» и ввести  $Q = 5$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 2.4 величину резонансной амплитуды колебаний маятника  $a_p$ . Повторить моделирование при других  $x_p$ ,  $\phi_0$  и  $Q$ , указанных в таблице. Для каждого опыта рассчитать отношение резонансного периода колебаний  $T_p$  к периоду собственных колебаний  $T_0$  маятника

$$\frac{T_p}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega_p} = \frac{1}{x_p}, \quad (2.19)$$

и величину резонансной амплитуды колебаний маятника

$$a_p \approx Q\phi_0, \quad (2.20)$$

Заполнить таблицу 2.4.

Таблица 2.4

Результаты моделирования резонансных колебаний

Параметры системы			Результаты моделирования	Результаты расчетов	
$x_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}$	$\phi_0$ , град	$Q$	$a_p$ , град	$\frac{T_p}{T_0}$	$a_p$ , град
0,99	12	5			
0,9975	7,5	10			
0,9988	6	15			
0,9993	5	20			

**4.1.3.** Изучить установившиеся колебания осциллятора вдали от резонанса, т. е. на частоте возбуждения шатуна, которая не равна резонансной частоте  $\omega \neq \omega_p$ . В этом случае амплитуда установившихся колебаний в несколько раз меньше резонансной амплитуды.

На панели ввода параметров: 1) задать частоту возбуждения шатуна  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,796$ ; 2) ввести амплитуду шатуна  $\phi_0 = 6^\circ$ ; 3) установить

«Вязкое трение» и ввести  $Q = 5$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в таблицу 2.5 величину амплитуды установившихся колебаний маятника  $a$ . Повторить моделирование при других  $x_p$ ,  $\phi_0$  и  $Q$ , указанных в таблице.

Для каждого опыта при данных  $\phi_0$  и  $Q$  найти отношение резонансной амплитуды (2.20) к полученной моделированием амплитуде установившихся колебаний  $a$ . Заполнить последний столбец табл. 2.5.

Таблица 2.5

Результаты моделирования установившихся колебаний вдали от резонанса

Параметры системы			Результаты моделирования	Результаты расчетов
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\phi_0$ , град	$Q$	$a$ , град	$\frac{a_p}{a}$
0,796	6	5		
0,955	3	20		
1,042	3	20		
1,152	6	5		
1,4	9	5		

**4.2.** Изучить переходные процессы установки вынужденных колебаний осциллятора.

**4.2.1.** Изучить условия, при которых переходный процесс не возникает.

В панели «Условия моделирования» задать «Переходные процессы».

Можно выбрать начальные значения угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$  маятника, при которых в системе переходного процесса не будет совсем: как только шатун начнет совершать

возбуждающие колебания, маховик сразу же будет вынужденно колебаться с установившейся амплитудой.

В панели ввода параметров: 1) ввести частоту возбуждения  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,1$ ; 2) задать амплитуду возбуждения  $\phi_0 = 30^\circ$ ; 3) установить «Вязкое трение» и задать  $Q = 20$ ; 4) ввести начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Будет ли наблюдаться переходный процесс на графике колебаний угла маятника? Указать этот результат наблюдения в таблице 2.6. Записать также с экрана величину установившейся амплитуды вынужденных колебаний ротора  $a$ . Повторить моделирование при других параметрах системы и начальных условиях, указанных в табл. 2.6.

Таблица 2.6

Результаты моделирования переходных процессов

Параметры системы			Начальные условия		Результаты моделирования	
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$\phi_0$ , град	$Q$	$\phi(0)$ , град	$\frac{\dot{\phi}(0)}{\omega_0}$ , рад	Наличие переходного процесса	$a$ , град
0,1	30	20	0	0		
0,5	15	25	-0,5	0,173		
0,8	20	10	10	0,5		
1	15	5	-75	0		
1,4	20	30	10	0		
1,5	15	25	-0,6	-0,313		

Используя входные параметры  $x$  и  $Q$ , для опытов, где маятник сразу совершал установившиеся колебания без переходных процессов, провести расчеты значений амплитуды и начальных данных по формуле

$$a = \frac{\phi_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} . \quad (2.21)$$

Записать результаты в отчет. Сравнить данные моделирования и расчетов.

**4.2.2.** Изучить процесс установки вынужденных колебаний осциллятора вблизи резонанса.

В случае, когда частота колебаний шатуна  $\omega$  близка к резонансному значению (2.9), в переходном процессе будут наблюдаться биения ротора – наложение колебаний близких частот: вынуждающих колебаний с частотой шатуна  $\omega_p$  и собственных колебаний ротора частоты  $\omega_0$ . В процессе раскочки колебаний биения постепенно прекращаются, плавно переходя в установившиеся вынужденные колебания ротора с постоянной амплитудой.

Провести моделирование переходного процесса вблизи резонанса в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

Выбрать временной масштаб наблюдения – 20 периодов. В панели ввода параметров: 1) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать частоту возбуждения  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 1,99$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения

$\phi_0 = 15^\circ$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$  и  $\varphi(0) = 0$ .

Провести моделирование, нажав клавишу «Пуск». Записать с экрана величину амплитуды установившихся колебаний  $a$  в таблицу 2.7.

Провести моделирование при других величинах  $x$ , указанных в таблице. Для каждого опыта посчитать амплитуду установившихся колебаний ротора

$$a = \left| \frac{\phi_0}{1-x^2} \right| , \quad (2.22)$$

перевести  $a$  в радианы и найти максимальную угловую скорость маховика в единицах собственной частоты по формуле

$$\frac{\dot{\phi}_{\max}}{\omega_0} = 2ax . \quad (2.23)$$

Заполнить табл. 2.7. Сделать вывод.

Таблица 2.7

Результаты моделирования переходных процессов в окрестности резонанса без трения

Параметры системы	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$a$ , град	$\frac{\dot{\phi}_{\max}}{\omega_0}$ , рад
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$a$ , град	$a$ , град	$\frac{\dot{\phi}_{\max}}{\omega_0}$ , рад
1,19			
1,2			
1,21			

Провести моделирование переходного процесса вблизи резонанса при тех же условиях ( $\phi_0 = 15^\circ$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$ ), но в присутствии трения.

Выбрать временной масштаб наблюдения – 20 периодов. В панели ввода параметров: 1) установить «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) ввести  $Q = 20$ . Провести моделирование при разных величинах  $x$ , записав с экрана численное значение для амплитуды  $a$ .

Таблица 2.8

Результаты моделирования переходных процессов в окрестности резонанса при трении

Параметры системы	Результаты моделирования	
	$a$ , град	Форма фазовой траектории
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$	$a$ , град	Форма фазовой траектории
1,19		
1,2		
1,21		
1,25		

Перейти в раздел «Фазовая траектория». Установить временной масштаб наблюдения – 20 периодов. Повторить моделирование при тех же начальных условиях и параметрах системы. Какую форму имеет фазовая траектория биений (окружность, эллипс, сепаратрису или систему круговых петель) при переходном процессе? Указать названия форм фазовых траекторий в табл. 2.8 для каждого опыта.

#### 4.2.3. Изучить переходные процессы при разных частотах шатуна.

Переходные процессы установки вынужденных колебаний осциллятора существенно отличаются при малых и больших частотах возбуждения шатуна. При расчете амплитуды установившихся колебаний вдали от резонанса наличие трения в системе можно не учитывать.

Малые частоты. При малой частоте возбуждения ( $x = \frac{\omega}{\omega_0} < 1$ ) шатун и ротор колеблются в фазе.

В начале переходного процесса сравнительно быстрые колебания ротора происходят около среднего положения, которое перемещается вместе с шатуном. Быстрые колебания маховика постепенно затухают, переходя в медленные колебания на вынуждающей частоте  $\omega$  с установившейся амплитудой  $a$ , которая немного больше амплитуды колебаний шатуна  $\phi_0$ .

В этом случае амплитуда установившихся колебаний может быть найдена по формуле (2.22), а максимальный угол отклонения из выражения

$$\varphi_{\max} \approx a(1 + x) . \quad (2.24)$$

В разделе «Графики колебаний» провести моделирование переходного процесса при малых частотах в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

Выбрать временной масштаб наблюдения – 20 периодов. В панели ввода параметров: 1) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать

частоту возбуждения  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 0,125$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения

$\phi_0 = 15^\circ$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ .

Провести моделирование, нажав клавишу «Пуск». Записать в табл. 2.9 с экрана амплитуду установившихся колебаний  $a$  и максимальный угол отклонения  $\phi_{\max}$  в переходном процессе.

Провести моделирование при других  $x$ , указанных в таблице. Для каждого опыта посчитать  $(1 - x^2)^{-1}$ , амплитуду  $a$  и  $\phi_{\max}$  (см. (2.22), (2.24)). Заполнить табл. 2.9, сделать вывод.

В разделе «Фазовая траектория» провести моделирование с указанными параметрами системы и обратить внимание на форму фазовой траектории переходного процесса.

Таблица 2.9

Результаты моделирования переходных процессов  
при малых частотах возбуждения

Параметры системы	Результаты моделирования		Результаты расчетов		
	$a$ , град	$\phi_{\max}$ , град	$(1 - x^2)^{-1}$	$a$ , град	$\phi_{\max}$ , град
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$					
0,125					
0,25					
0,5					

Большие частоты. При большой частоте возбуждения ( $x = \frac{\omega}{\omega_0} > 1$ )

установившиеся колебания маховика происходят в противофазе по отношению к заданным быстрым колебаниям шатуна.

Во время переходного процесса быстрые вынужденные колебания шатуна налагаются на медленные собственные колебания



ротора. В результате устанавливаются вынужденные колебания ротора с амплитудой, которая оказывается мала, по сравнению с  $\phi_0$  (см. (2.22)).

Чтобы оценить максимальный угол отклонения маятника в переходном процессе, необходимо изучить его две составляющие: вынужденные и собственные колебания. По графикам процесса можно оценить максимальное смещение ротора в момент времени  $t = kT$ , выраженные через величины  $k$  – доли периода шатуна  $T$ . Тогда

$$\varphi_{\max} \approx |a \sin \omega t| + |2ax \sin \omega_0 t|. \quad (2.25)$$

В уравнении (2.25) фазы синусов равны:

$$\omega t = \omega kT = \omega k \frac{2\pi}{\omega} = k2\pi, \quad (2.26)$$

$$\omega_0 t = \omega_0 kT = \omega_0 k \frac{2\pi}{\omega} = k \frac{2\pi}{x}. \quad (2.27)$$

В разделе «Графики колебаний» провести моделирование переходного процесса при больших частотах в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

Выбрать временной масштаб наблюдения – 20 периодов. В панели ввода параметров: 1) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать частоту возбуждения  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = 2$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения

$\phi_0 = 15^\circ$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ . Провести моделирование, нажав клавишу «Пуск». Записать с экрана амплитуду установившихся колебаний  $a$  и максимальный угол отклонения в переходном процессе  $\varphi_{\max}$  в таблицу 2.10. Повторить опыты при всех  $x$ .

Получить разложение переходного процесса на составляющие при моделировании, зайдя в панель «Условия моделирования» и выбрав опцию «Разложение переходного процесса».

Проверить момент времени, когда наступает максимум смещения маятника: приблизительно через две трети периода быстрых колебаний шатуна (величины  $t = kT$  даны в табл.2.10).

Таблица 2.10

Результаты моделирования переходных процессов при больших частотах возбуждения

Параметры системы	Результаты моделирования			Результаты расчетов	
	$a$ , град	$\varphi_{\max}$ , град	$t=kT$	$a$ , град	$\varphi_{\max}$ , град
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$					
2			$\frac{2}{3}T$		
4			$\frac{3}{4}T$		
6			$\left(1 + \frac{3}{4}\right)T$		

Для каждого опыта посчитать амплитуду  $a$  (см. (2.22)), угол  $\varphi_{\max}$  – по формуле (2.25), используя выражения (2.30) и (2.31) при расчете фаз.

В разделе «Фазовая траектория» провести моделирование с заданными в таблице 2.10 значениями  $x$ . Указать в отчете форму фазовой траектории маятника для переходного процесса.

### 5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение для вынужденных колебаний. Приведите примеры таких колебаний.
2. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного осциллятора. Поясните смысл входящих в уравнение физических величин.

3. Поясните смысл терминов «переходный процесс», «установившиеся колебания».
4. Что называют явлением резонанса? Как зависит резонансная амплитуда от коэффициента затухания?
5. Как связана резонансная частота с добротностью системы при малом трении?
6. Что называют биениями? Почему возникают биения в переходном процессе раскачки колебаний торсионного осциллятора?
7. Изобразите схему электромагнитного осциллятора с внешним переменным сигналом. Поясните аналогию между физическими величинами вынужденных колебаний механического и электромагнитного осцилляторов.

## Лабораторная работа №5

### ОСЦИЛЛЯТОР С НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

#### 1. Цель работы

Изучить вынужденные колебания линейного осциллятора.

#### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста. Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 2 и описание работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 2.11

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения ротора
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость ротора
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость в относительных единицах собственной частоты маховика
$n = \frac{T}{T_0}$	Период возбуждения шатуна в единицах периода собственных колебаний ротора
$\phi_0$	Амплитуда колебаний шатуна
$a$	Установившаяся амплитуда вынужденных колебаний ротора
$Q$	Добротность системы (при наличии трения)

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают вынужденные колебания торсионного пружинного осциллятора, ротор которого совершает колебания под действием непериодических движений стержня – шатуна (рис. 2.1).

### 4. Порядок выполнения работы

4.1. Изучить резонансное возбуждение колебаний осциллятора.

В разделе «Графики колебаний» на панели «Условия моделирования» выбрать опцию «Переходный процесс».

4.1.1. Изучить процесс установления резонансных колебаний без трения.

Рассмотреть условия основного резонанса, когда период  $T$  возбуждения равен периоду  $T_0$  собственных колебаний ротора. Проверить, что в этом случае при отсутствии трения амплитуда колебаний ротора увеличивается со временем линейно.

В панели ввода параметров: 1) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 2) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 1$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения (амплитуду шатуна)  $\phi_0 = 4,5^\circ$ ; 4) задать начальные условия  $\dot{\phi}(0) = 0$  и  $\phi(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана в табл. 2.12 амплитуду маятника  $\varphi_m$  через каждый цикл колебаний  $N$ .

Таблица 2.12

Результаты моделирования переходного процесса без трения

Результаты моделирования	$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\varphi_m$ , град										
Результаты расчетов	$\varphi_m$ , град										

Провести расчеты для размаха маховика после каждого из циклов (т. е. в моменты времени  $t_N = NT_0$ ) по формуле

$$\varphi_m(t_N) = \frac{2}{\pi} \phi_0 \sqrt{1 + (2\pi N)^2} . \quad (2.28)$$

Результаты расчетов занести в табл. 2.12. Сделать вывод.

#### 4.1.2. Проверить наличие переходного процесса в системе.

При некотором начальном угле отклонения ротора  $\varphi(0)$  резонансные колебания осциллятора будут наблюдаться без раскочки – сразу после того, как начнет совершать движения шатун, возбуждающий колебания.

В панели ввода параметров: 1) установить «Вязкое трение»; 2) задать добротность  $Q = 15$ ; 3) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 1$ ; 4) ввести амплитуду возбуждения  $\phi_0 = 7^\circ$ ; 5) задать  $\varphi(0) = -134^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Будет ли наблюдаться переходный процесс на графике колебаний угла маятника? Указать этот результат наблюдения в таблице 2.13. Записать также с экрана величину установившейся амплитуды вынужденных колебаний маятника  $a$ . Повторить моделирование при других параметрах системы и начальных углах, указанных в таблице.

Таблица 2.13

Результаты моделирования переходных процессов

Параметры системы		Начальные условия	Результаты моделирования	
$Q$	$\phi_0$ , град	$\varphi(0)$ , град	Наличие переходного процесса	$a$ , град
15	7	-134		
15	7	0		
8	12	-122		
8	12	0		
10	10	-127		
10	10	0		

#### 4.1.3. Изучить установившиеся резонансные колебания осциллятора.

В панели «Условия моделирования» задать опцию «Установившиеся колебания».

Найти амплитуды установившихся колебаний маятника при настройке на резонансы  $T = nT_0$ ,  $n = 1, 3, 5$ . Разложить установившийся процесс колебаний на составляющие – гармоники колебания.

В панели ввода параметров: 1) установить «Вязкое трение»; 2) задать  $Q = 10$ ; 3) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 1$ ; 4) ввести амплитуду шатуна  $\phi_0 = 10^\circ$ ; 4) задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Провести моделирование колебаний. В таблицу 2.14 внести с экрана данные для величины амплитуды установившихся колебаний  $a$ .

Таблица 2.14

Результаты моделирования резонансов

Номер резонанса	Результаты моделирования	Расчеты для гармоник выходного сигнала			
		$a_1$ , град	$a_3$ , град	$a_5$ , град	$a_7$ , град
$n$	$a$ , град				
1					
3					
5					

Зайти в раздел «Преобразование спектра». Обратить внимание на разложение прямоугольного входного сигнала (периодического движения шатуна).

Построить графики первых гармоник  $k=1, 3, 5, 7$  выходных колебаний осциллятора в условиях первого резонанса ( $T = nT_0$ ,  $n = 1$ ). Для этого несколько раз последовательно нажать кнопку «Сложить». Обратить внимание на малый вклад высших гармоник в резонансные колебания маятника по сравнению с *первой гармоникой* (амплитуда

первой гармонике гораздо больше амплитуд  $k$ -гармоник:  $a_1 \gg a_k$ , где  $k = 3, 5, 7$ ).

Вернуться в раздел «Графики колебаний». Провести моделирование установившихся колебаний в условиях третьего резонанса. Для этого в панели ввода параметров задать  $n = \frac{T}{T_0} = 3$ .

Записать с экрана в табл. 2.14 амплитуду установившихся колебаний. В разделе «Преобразование спектра» построить графики первых гармоник  $k = 1, 3, 5, 7$  выходных колебаний осциллятора. Обратить внимание на малый вклад  $k$ -гармоник в резонансные колебания маятника по сравнению с *третьей гармоникой* ( $a_3 > a_k$ , где  $k = 1, 5, 7$ ).

Провести моделирование для пятого резонанса ( $n=5$ ) и разложить установившиеся колебания осциллятора на гармоники. В данном случае наибольший вклад в резонансные колебания вносит *пятая гармоника* ( $a_5 > a_k$ , где  $k = 1, 3, 7$ ).

Найти амплитуды основных гармоник  $a_n$  первого резонанса ( $n=1$ ), третьего резонанса ( $n=3$ ) и пятого резонанса ( $n=5$ ), а также амплитуды гармоник  $a_k$  для каждого из резонансов ( $n \neq k$ ):

$$a_n = \frac{4\phi_0}{n\pi} Q, \quad n = 1, 3, 5. \quad (2.29)$$

$$n = 1: \quad a_k = \frac{a_1}{(k^2 - 1)Q}, \quad k = 3, 5, 7. \quad (2.30)$$

$$n = 3: \quad a_k = \frac{a_3}{kQ} \cdot \left| 1 - \frac{k^2}{3^2} \right|^{-1}, \quad k = 1, 5, 7. \quad (2.31)$$

$$n = 5: \quad a_k = \frac{a_5}{kQ} \cdot \left| 1 - \frac{k^2}{5^2} \right|^{-1}, \quad k = 1, 3, 7. \quad (2.32)$$

Заполнить табл. 2.14.



**4.1.4.** Изучить влияние трения на установившиеся резонансные колебания.

Провести моделирование установившихся вынужденных колебаний осциллятора в условиях высших резонансов, оценить влияние трения на размах установившихся колебаний.

В разделе «Графики колебаний» в панели ввода: 1) установить «Вязкое трение»; 2) ввести добротность  $Q = 10$ ; 3) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 3$ ; 4) ввести амплитуду возбуждения  $\phi_0 = 25^\circ$ ; 5) задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Провести моделирование колебаний. В таблицу 2.15 занести с экрана амплитуду установившихся колебаний, которая равна максимальному углу отклонения маятника (максимальному размаху)  $a = \varphi_m$ .

Таблица 2.15

Результаты моделирования третьего резонанса

Добротность	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$q$	$a = \varphi_m$ , град
$Q$	$a$ , град	$q$	$a = \varphi_m$ , град
10			
5			

Задать другую добротность системы  $Q = 5$ . Провести моделирование. Заполнить таблицу 2.15, сделав расчеты вспомогательной величины  $q$  и угла  $\varphi_m$  по формулам:

$$q = e^{-\frac{\pi}{2Q}}, \quad (2.33)$$

$$\varphi_m = \phi_0 \left( 1 + \frac{2q}{1 - q^n} \right). \quad (2.34)$$

Изучить влияние трения на установившиеся колебания в условиях пятого резонанса. В панели ввода параметров: 1) установить «Вязкое трение»; 2) задать  $Q = 20$ ; 3) ввести период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 5$ . Все другие установки оставить без изменения.

Провести моделирование колебаний. В таблицу 2.16 занести с экрана амплитуду установившихся колебаний – максимальный размах  $a = \varphi_m$ . Задать другую добротность (см. первый столбец табл. 2.16) и повторить моделирование. Обратит внимание на то, что с увеличением трения (уменьшения величины  $Q$ ) форма графика  $\varphi(t)$  становится все более похожей на форму прямоугольного импульса вынуждающей силы.

Величину  $q$  рассчитать по формуле (2.33), заполнив третий столбец таблицы 2.16. В случае относительно небольшого трения ( $Q > 3$ ) для величин  $\varphi_m$  сделать расчеты по формуле (2.34).

При добротностях системы  $Q = 1 \div 3$ , когда трение велико, величины  $\varphi_m$  оценить с помощью уравнения:

$$\varphi_m = \phi_0(1 + 2q) . \quad (2.35)$$

Таблица 2.16

Результаты моделирования пятого резонанса

Добротность	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$q$	$a = \varphi_m$ , град
$Q$	$a$ , град		
20			
15			
3			
2			
1			

#### 4.2. Изучить нерезонансное возбуждение колебаний маятника.

Когда период возбуждения шатуна не равен целому нечетному числу периодов собственных колебаний ротора, максимальный размах его установившихся колебаний меньше резонансного значения.

**4.2.1.** Изучить нерезонансное возбуждение колебаний осциллятора при больших периодах вынуждающей силы ( $T > T_0$ ).

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода: 1) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 2$ ; 2) ввести амплитуду возбуждения  $\phi_0 = 25^\circ$ ; 3) задать  $\phi(0) = 0$  и  $\dot{\phi}(0) = 0$ ; 4) убрать «Вязкое трение».

Провести моделирование и записать амплитуду установившихся колебаний маятника  $\varphi_m$  в табл. 2.17. Повторить моделирование, задав «Вязкое трение» и добротность  $Q$ . Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование. Изобразить в отчете график колебаний угла, угловой скорости и фазовую траекторию установившихся колебаний маятника.

Таблица 2.17

Результаты моделирования при  $T=2T_0$  ( $n=2$ )

Добротность	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$q$	$\varphi_m$ , град
$Q$	$\varphi_m$ , град		
$\infty$ (трения нет)			
10			
5			

Вернуться в раздел «Графики колебаний». В панели ввода параметров: 1) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 4$ ; 2) убрать «Вязкое трение». Все другие параметры оставить без изменения.

Провести моделирование, записав с экрана в табл. 2.18 амплитуду установившихся колебаний маятника  $\varphi_m$ . Повторить моделирование, задав «Вязкое трение» и разные добротности  $Q$ .

Таблица 2.18

Результаты моделирования при  $T=4T_0$  ( $n=4$ )

Добротность	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$q$	$\varphi_m$ , град
$Q$	$\varphi_m$ , град		
$\infty$ (трения нет)			
10			
5,72			
5			

Провести моделирование в разделе «Фазовая траектория». Изобразить в отчете график колебаний угла, угловой скорости и фазовую траекторию установившихся колебаний маятника.

Вернуться в раздел «Графики колебаний». В панели ввода параметров: 1) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 6$ ; 2) убрать «Вязкое трение». Все другие параметры оставить без изменения.

Провести моделирование, записав с экрана в табл. 2.19 амплитуду установившихся колебаний маятника  $\varphi_m$ . Повторить моделирование, задав «Вязкое трение» и добротность  $Q$ .

Провести моделирование в разделе «Фазовая траектория». Изобразить в отчете график колебаний угла, угловой скорости и фазовую траекторию установившихся колебаний маятника.

Таблица 2.19

Результаты моделирования при  $T=6T_0$  ( $n=6$ )

Добротность	Результаты моделирования	Результаты расчетов	
		$q$	$\varphi_m$ , град
$Q$	$\varphi_m$ , град		
$\infty$ (трения нет)			
10			
5,86			
5			

Для таблиц 2.17–2.19 провести расчеты вспомогательных величин  $q$  по формуле (2.33) и величин  $\varphi_m$  по формуле

$$\varphi_m = \phi_0 \left( 1 + \frac{2q}{1+q^n} \right). \quad (2.36)$$

Заполнить таблицу 2.20, рассчитав величины  $Q_m$  и  $q_m$ , которые соответствуют максимальному размаху маховика для разных периодов  $T$  (или разных  $n$ ):

$$Q_m = \frac{n\pi}{2 \ln(n-1)}, \quad (2.37)$$

$$q_m = (n-1)^{-1/n}. \quad (2.38)$$

Величину максимально возможного размаха ротора найти из уравнения:

$$\varphi_{\max} = \phi_0 \left( \frac{2}{n} (n-1)^{(1-1/n)} + 1 \right). \quad (2.39)$$

Таблица 2.20

Результаты расчетов добротности, соответствующей максимальному размаху

$n$	$Q_m$	$q_m$	$\varphi_{\max}$ , град
2			
4			
6			

**4.2.2.** Изучить нерезонансное возбуждение колебаний осциллятора при малых периодах вынуждающей силы ( $T < T_0$ ).

Проходящие под действием импульса шатуна малого периода установившиеся колебания осциллятора имеют характерные особенности: 1) колебания возбуждающего шатуна и ротора проходят в противофазах; 2) амплитуда шатуна гораздо больше амплитуды установившихся колебаний ротора  $\phi_0 \gg \phi_m$ ; 3) график колебаний угла – синусоида, а угловая скорость ротора изменяется со временем пилообразно.

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода: 1) убрать «Вязкое трение»; 2) задать период возбуждения  $n = \frac{T}{T_0} = 0,1$ ; 3) ввести амплитуду возбуждения  $\phi_0 = 50^\circ$ ; 4) задать  $\varphi(0) = 0$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Провести моделирование колебаний. Записать с экрана в таблицу 2.21 амплитуду установившихся колебаний  $\varphi_m$  в градусах. Повторить моделирование при других  $n$  и  $\phi_0$ , указанных в таблице.

Таблица 2.21

Результаты моделирования колебаний под действием импульсов малого периода

Параметры системы		Результаты моделирования	Результаты расчетов	
$n$	$\phi_0$ , град	$\varphi_m$ , град	$\varphi_m$ , град	$\frac{\dot{\varphi}_m}{\omega_0}$ , рад
0,1	50			
0,2	40			
0,25	25			

Рассчитать амплитуду установившихся колебаний маятника:

$$\varphi_m = \phi_0 \frac{\pi^2}{8} n^2 . \quad (2.40)$$

Перевести  $\phi_0$  в радианы и посчитать максимальную угловую скорость установившихся колебаний в относительных единицах частоты:

$$\frac{\dot{\phi}_m}{\omega_0} = \phi_0 \frac{\pi}{2} n . \quad (2.41)$$

Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование. Изобразить в отчете 1) график колебания угла отклонения; 2) график колебания угловой скорости; 3) фазовую траекторию колебаний ротора.

## 5. Контрольные вопросы

1. Поясните термины «вынужденные колебания», «переходный процесс» и «установившиеся колебания».
2. Что такое резонанс? Напишите резонансные условия возбуждения торсионного осциллятора.
3. Что называют порядком резонанса? Каков порядок у основного резонанса?
4. Что называют добротностью системы?
5. Записать выражение для амплитуды седьмой гармоники ( $k = 7$ ) установившихся колебаний в условиях третьего резонанса ( $n = 3$ ), полагая известными добротность системы  $Q$  и амплитуду шатуна  $\phi_0$ .

## РАЗДЕЛ 3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

#### Физическая система

*Параметрическими колебаниями* называют вынужденные колебания под действием принудительного изменения (или, как говорят, модуляции) одного из параметров системы. Примерами таких колебаний являются: раскачивающиеся колебания маятника при периодическом изменении длины нити; колебания заряда и напряжения в электрическом колебательном контуре под действием принудительной модуляции индуктивности катушки и др.

Для изучения параметрических колебаний также используют модель линейного гармонического осциллятора (Раздел 1, стр. 5). В лабораторных работах №6 и №7 рассматривается торсионный пружинный осциллятор (рис. 3.1) – ротор (маховик), выполненный в виде стержня с грузами, которые находятся в некотором срединном положении на стержне. К стержню прикреплен один конец спиральной пружины, а другой – закреплен неподвижно.

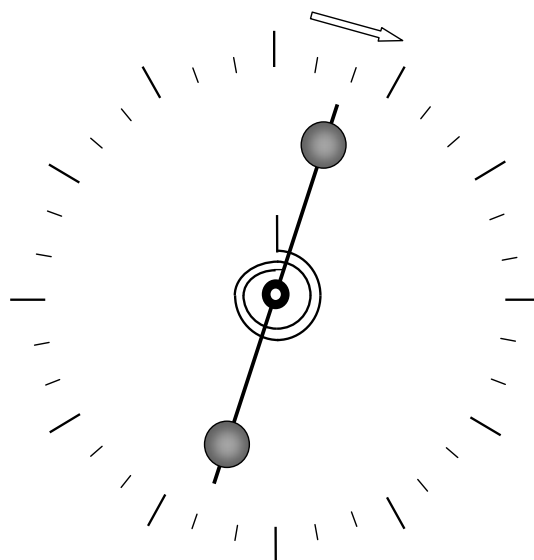


Рис.3.1. Торсионный пружинный осциллятор



После возбуждения отклонением из положения равновесия или однократным толчком маховик осциллятора совершает собственные колебания относительно положения равновесия с частотой и периодом собственных колебаний, которые зависят от момента инерции маховика  $J_0$  и постоянной пружины  $D$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J_0}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{D}}. \quad (3.1)$$

Затухание таких колебаний происходит из-за вязкого трения среды. Интенсивность затуханий зависит от коэффициента затухания  $\gamma$ .

Специальное механическое устройство перемещает одновременно оба груза на стержне торсионного осциллятора от срединного положения к оси вращения и обратно к концам стержня (рис. 3.2). В этом случае изменяется параметр системы – момент инерции ротора. Условия колебания осциллятора зависят от глубины модуляции момента инерции  $m < 1$  и его периода модуляции  $T$ .

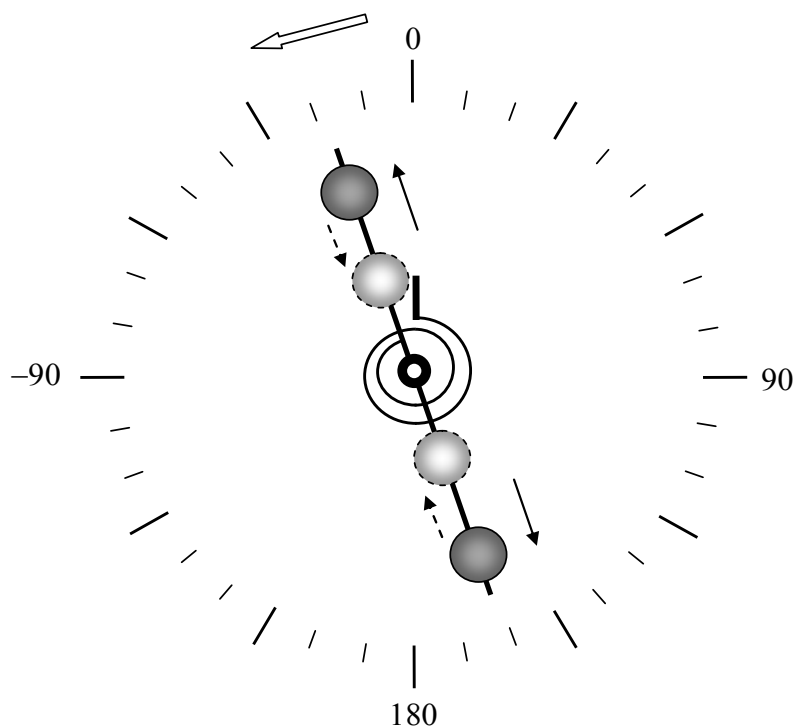


Рис.3.2. Торсионный пружинный осциллятор с принудительной модуляцией момента инерции маховика

Если грузы из серединного положения скачком (т. е. практически мгновенно) сместить к концам стержня, то момент инерции маховика увеличится, а период его колебаний уменьшится. Используя величину глубины модуляции  $m$ , можно записать:

$$J_1 = J_0(1 + m) > J_0, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D}} < T_0. \quad (3.2)$$

Если грузы быстро сместить в обратном направлении ближе к оси вращения, то момент инерции ротора станет меньше, а период собственных колебаний – больше:

$$J_2 = J_0(1 - m) < J_0, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{D}} > T_0. \quad (3.3)$$

Как следует из опыта, когда момент инерции ротора увеличивается  $J_1 > J_2$ , его угловая скорость вращения становится меньше  $\dot{\phi}_1 < \dot{\phi}_2$ . Напротив, с уменьшением момента инерции  $J_2 < J_1$  угловая скорость маховика становится больше  $\dot{\phi}_1 > \dot{\phi}_2$ . Эту зависимость можно объяснить с помощью закона сохранения момента импульса.

Момент импульсы ротора  $L$  равен произведению момента инерции и его угловой скорости. При быстрых смещениях грузов можно пренебречь действием момента неконсервативной силы вязкого трения. Тогда закон сохранения момента импульса маховика имеет вид

$$J_1\dot{\phi}_1 = J_2\dot{\phi}_2. \quad (3.4)$$

Из равенства (3.4) следует, что большему моменту инерции ротора соответствует меньшая угловая скорость и меньшему моменту инерции – большая угловая скорость.

### Параметрический резонанс

Если при модуляции параметра колебания в системе нарастают, то такие колебания называют *параметрическим резонансом*.

Параметрический резонанс отличается условиями возбуждения от обычного резонанса, который возможен при вынужденных колебаниях системы под действием внешней периодической силы.

Параметрический резонанс возникает в том случае, если выполнены следующие соотношения между собственной частотой колебания осциллятора  $\omega_0$  (собственным периодом  $T_0$ ) и частотой изменения (модуляции) параметра системы  $\omega_n$  (периодом модуляции  $T_n$ ):

$$\omega_n = \frac{2\omega_0}{n}, \quad T_n = \frac{nT_0}{2}. \quad (3.5)$$

Здесь целое число  $n = 1, 2, 3, \dots$  – называют *порядком резонанса*. Чем выше порядок резонанса (т. е. чем больше число  $n$ ) при данной глубине модуляции, тем меньше энергия, передаваемая системе за период ее колебаний при изменении параметра.

Во всех реальных колебательных системах действуют силы вязкого трения, приводящие к потерям энергии собственных колебаний. Параметрическая раскачка колебаний возможна, если вложение энергии за период колебания системы, вызванное модуляцией параметра, превосходит рассеиваемую энергию собственных колебаний из-за трения, т. е. если преодолен некоторый *порог*. Другими словами, параметрический резонанс возникает при выполнении *пороговых условий*, когда амплитуда параметра (или величина модуляции  $m$ ) больше некоторого минимального или *порогового значения*  $m > m_{\min}$ . Именно в этом случае колебания системы сопровождаются нарастанием их амплитуды.

*Пороговым режимом* параметрического резонанса называют параметрические колебания с постоянной амплитудой. В случае торсионного осциллятора потери энергии собственных колебаний из-за трения компенсируются за счет поступления энергии от источника (или механизма), который приводит в движение грузы вдоль стержня, т. е. обеспечивает модуляцию момента инерции ротора.

Пороговый режим резонанса с постоянной амплитудой колебаний наблюдается в случае, если глубина модуляции  $m \approx m_{\min}$ . Если глубина модуляции невелика  $m < m_{\min}$ , то колебания осциллятора с течением времени будут гаситься из-за потерь энергии колебаний на преодоление работы сил трения.

Возбуждение нарастающих параметрических колебаний возможно не только на частотах модуляции параметра  $\omega_n$  (при периоде  $T_n$ ), выражаемых уравнениями (3.5), задающими условия точной настройки системы на резонанс. Раскачка колебаний также может происходить, если частота (период) модуляции параметра принадлежит интервалу частот, лежащих по обе стороны от частоты  $\omega_n$  (периода  $T_n$ ). Этот интервал называют *интервалом параметрической неустойчивости системы* (или интервалом настройки системы на резонанс). Ширина интервала неустойчивости становится больше при увеличении глубины модуляции параметра.

### Пороговые условия

Чтобы оценить пороговое значение глубины модуляции  $m_{\min}$ , найдем приращение кинетической энергии ротора  $\Delta E$  при смещении грузов скачком от концов стержня к оси вращения, когда момент инерции уменьшается от  $J_1 = J_0(1 + m)$  до  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Рассмотрим случай малых  $m \ll 1$ . Так как момент импульса ротора не изменился (см. (3.4)), то для величины  $\Delta E = E_2 - E_1$  получаем:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_2} - \frac{L^2}{2J_1} = \frac{L^2}{2J_0} \cdot \left( \frac{1}{1-m} - \frac{1}{1+m} \right) \approx E_0 \cdot 2m. \quad (3.6)$$

Из (3.6) для отношения приращения энергии при сближении грузов к полной энергии осциллятора, которая приближенно равна  $E_0 = \frac{L^2}{2J_0}$ , имеем:

$$\frac{\Delta E}{E_0} \approx 2m . \quad (3.7)$$

Обычно грузы смещают к концам стержня в тот момент времени, когда маховик отклонился в крайнее положение, и его угловая скорость и кинетическая энергия равны нулю. Поэтому при быстром смещении грузов друг от друга ротор практически не теряет кинетическую энергию.

Рассмотрим *основной параметрический резонанс* ( $n = 1$ ), когда период модуляции момента инерции в два раза меньше периода собственных колебаний осциллятора:  $T_{n=1} = \frac{1}{2} T_0$ . За период собственных колебаний  $T_0$  маховик дважды получает приращение энергии (3.6) и относительное увеличение его кинетической энергии за период равно

$$\frac{\Delta E_{T_0}}{E_0} \approx 4m . \quad (3.8)$$

Тогда процесс увеличения кинетической энергии ротора со временем можно характеризовать экспоненциальным законом:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t) , \quad \text{где } \alpha = \frac{4m}{T_0} . \quad (3.9)$$

Показатель роста энергии  $\alpha$  зависит от глубины модуляции линейно.

Как уже было сказано, в процессе собственных колебаний происходит рассеяние энергии за счет действия в системе сил вязкого трения. Для линейного осциллятора, когда момент силы трения пропорционален угловой скорости и коэффициенту затухания  $\gamma$ , уменьшение кинетической энергии ротора со временем определяет экспоненциальный закон:

$$E_d(t) = E_0 \exp(-2\gamma t) . \quad (3.10)$$

Тогда за период собственных колебаний  $T_0$  маховик теряет энергию, относительная величина которой равна

$$\frac{\Delta E_{d(T_0)}}{E_0} = 2\gamma T_0 . \quad (3.11)$$

Приравняем относительное увеличение кинетической энергии (3.8) и относительное уменьшение энергии из-за трения за период  $T_0$ , и получим выражение для порогового значения глубины модуляции  $m_{\min}$  в условиях основного ( $n = 1$ ) параметрического резонанса:

$$m_{\min} = \frac{2\gamma}{T_0} = \frac{\pi}{2Q} . \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) позволяет задавать глубину  $m_{\min}$  по величине добротности  $Q$ .

Приведем данные для пороговых величин  $m_{\min}$  при третьем ( $n = 3$ ) и втором ( $n = 2$ ) параметрических резонансах:

$$n = 3 , \quad T_{n=3} = \frac{3}{2} T_0 , \quad m_{\min} = \frac{3\pi}{2Q} ; \quad (3.13)$$

$$n = 2 , \quad T_{n=2} = T_0 , \quad m_{\min} = \sqrt{\frac{2}{Q}} . \quad (3.14)$$

### Интервалы неустойчивости

При существенных значениях глубины модуляции  $m < 1$  для величины периода собственных колебаний осциллятора требуется сделать уточнения. Когда грузы находятся в средних положениях, момент инерции ротора равен  $J_0$  – среднему значению от максимальной и минимальной величин моментов инерции. Тогда период колебания осциллятора равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{D}} , \quad \text{где } J_0 = \frac{J_1 + J_2}{2} . \quad (3.15)$$

Если грузы смещены к концам стержня, то максимальный момент инерции ротора  $J_1$  определяет период, наибольший по величине

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D}} \approx T_0\left(1 + \frac{m}{2}\right)$ . Если грузы сместить к оси вращения, то момент инерции станет минимальным по величине  $J_2$ , и период колебаний ротора уменьшится  $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{D}} \approx T_0\left(1 - \frac{m}{2}\right)$ .

В дальнейшем под величиной частоты собственных колебаний  $\omega_{av}$  будем понимать среднее арифметическое значение:

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \text{где } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}. \quad (3.16)$$

Поэтому за период собственных колебаний ротора  $T_{av}$  примем величину:

$$T_{av} = \frac{2\pi}{\omega_{av}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}. \quad (3.17)$$

Тогда условия (3.5) точной настройки системы на параметрический резонанс данного порядка  $n$  перепишем в виде

$$\omega_n = \frac{2\omega_{av}}{n}, \quad T_n = \frac{nT_{av}}{2}. \quad (3.18)$$

Для малых и умеренных значений глубин модуляции получим приближенные выражения для  $\omega_{av}$  и  $T_{av}$ , используя разложение в ряд:

$$\omega_{av} \approx \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}m^2\right), \quad T_{av} \approx T_0\left(1 - \frac{3}{8}m^2\right). \quad (3.19)$$

Из уравнений (3.19) следует, что с увеличением глубины модуляции собственная частота колебаний увеличивается, а период — уменьшается.

Запишем границы интервала для периода модуляции  $T$ , который называют *интервалом параметрической неустойчивости*, в следующем виде:

$$T \in [T_-; T_+], \quad (3.20)$$

где  $T_- = T_n - \Delta T$  – левая граница интервала;  $T_+ = T_n + \Delta T$  – правая граница интервала;  $T_n$  – период из условия точной настройки на резонанс (3.18).

В лабораторных работах №6 и №7 в качестве единицы времени взят период  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{D}}$ . Ниже приведены приближенные выражения в единицах  $T_0$  для границ интервала  $T_{\mp}$  параметрических резонансов первых трех порядков.

Основной резонанс  $n = 1$ : 
$$T_{\mp} \approx \frac{1}{2}T_0\left(1 \mp \frac{m}{\pi} - \frac{3}{8}m^2\right), \quad (3.21)$$

второй резонанс  $n = 2$ : 
$$T_{\mp} \approx T_0 + \left(\mp \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right)m^2T_0, \quad (3.22)$$

третий резонанс  $n = 3$ : 
$$T_{\mp} \approx T_0\left(\frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} - \frac{9}{16}m^2\right). \quad (3.23)$$



# Лабораторная работа №6

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

### 1. Цель работы

Изучить параметрические колебания линейного осциллятора.

### 2. Порядок оформления отчета

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста, Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 3 и описание данной работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 3.1

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения маховика
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость маховика
$\frac{T}{T_0}$	Период модуляции (период изменения момента инерции) в единицах периода собственных колебаний осциллятора
$m$	Глубина модуляции момента инерции ротора
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость в относительных единицах собственной частоты осциллятора
$Q$	Добротность системы (при наличии трения)

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают параметрические колебания торсионного пружинного осциллятора с принудительной модуляцией момента инерции маховика (рис. 3.2). Момент инерции увеличивается скачком при быстром смещении грузов из среднего положения к концам стержня – см. выражение (3.2). При сближении обоих грузов к оси вращения момент инерции уменьшается скачком – см. (3.3).

### 4. Порядок выполнения работы

**4.1.** Изучить основной параметрический резонанс ( $n = 1$ ). Условие возбуждения параметрического резонанса:  $T = n \frac{T_0}{2}$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$

**4.1.1.** Рассмотреть основной резонанс ( $n = 1$ ) в отсутствие трения.

В системе без трения изучить условия возбуждения основного резонанса, когда период  $T$  модуляции момента инерции маховика близок по величине к половине периода  $T_0$  его собственных колебаний. Проверить моделированием, что при этом амплитуда колебаний ротора увеличивается со временем экспоненциально.

Зайти в раздел «Физическая система». В панели ввода параметров: 1) ввести глубину модуляции  $m = 7\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать  $\varphi(0) = 45^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана монитора в таблицу 3.2 число циклов модуляций момента инерции  $N_T$ , за которые амплитуда колебаний маятника увеличится ровно в два раза:  $\varphi_m = 2\varphi(0) = 90^\circ$ .

Провести моделирование для других  $m$ , указанных в таблице. Рассчитать величины  $m$ , используя результаты опытов, по формуле

$$m = \frac{\ln 2}{N_T} . \quad (3.24)$$

Результаты расчетов занести в табл. 3.2. Сделать вывод.

Таблица 3.2

Результаты моделирования основного параметрического резонанса без трения

Параметры системы	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$m, \%$	$N_T$	$m, \%$
7		
9		
14		

Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование для одного из набора входных параметров. В отчете изобразить рисунок фазовой траектории параметрических колебаний маятника.

**4.1.2.** Изучить пороговые условия возбуждения основного резонанса при трении в системе. Провести моделирование стационарных колебаний.

В пороговом режиме при соответствующем пороговом значении добротности  $Q_{\min}$  увеличение энергии колебаний за счет изменения момента инерции ротора компенсируется потерями энергии колебаний из-за трения. В этом случае амплитуда колебаний маховика остается стационарной, т. е. не изменяется.

Начальные условия также определяют режим колебаний. При некотором начальном угле отклонения  $\varphi(0)$  параметрические колебания ротора будут стационарны только при определенной его начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ .

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода параметров:  
1) ввести  $m = 15\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,4957$ ; 3) поставить

«Вязкое трение» и задать добротность  $Q = 10,6$ ; 4) ввести  $\varphi(0) = 20^\circ$  и начальную угловую скорость  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -0,028$  рад.

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование, наблюдая стационарный режим, при котором амплитуда колебаний не изменяется и раскачки колебаний маховика не происходит.

Провести моделирование стационарного режима при других данных системы и начальных условиях, указанных в таблице 3.3.

Результаты моделирования проверить расчетами по формулам:

$$Q_{\min} = \frac{\pi}{2m}, \quad (3.25)$$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1-m^2}{2(1+\sqrt{1-m^2})}}. \quad (3.26)$$

Заполнить таблицу 3.3. Сделать вывод.

Таблица 3.3

Результаты моделирования стационарного процесса

Параметры системы			Начальные условия		Результаты расчетов	
$m, \%$	$\frac{T}{T_0}$	$Q$	$\varphi(0),$ град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0},$ рад	$Q_{\min}$	$\frac{T}{T_0}$
15	0,4957	10,6	20	-0,028		
20	0,5	8,29	20	-0,07		
40	0,4981	4,3	31	-0,09		

**4.1.3.** Изучить разные режимы параметрических колебаний осциллятора.

В панели ввода: 1) ввести глубину модуляции  $m = 15\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,4957$ ; 3) убрать «Вязкое трение» ( $Q \rightarrow \infty$ );

4) задать начальные условия:  $\varphi(0) = 20^\circ$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 0$ .

Таблица 3.4

Результаты моделирования колебаний при глубине модуляции  $m = 15\%$

$Q$	$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад	Изменения амплитуды	Режим колебаний
$\infty$	20	0		
5	20	-0,028		
10,6	20	-0,028		
21,2	20	-0,028		

Провести моделирование колебаний. Что происходит с амплитудой ротора: она увеличивается (режим раскачки), уменьшается (режим затухания) или не изменяется (стационарный режим)? Результаты наблюдений занести в таблицу 3.4.

В панели ввода параметров: 1) установить «Вязкое трение»; 2) задать добротность системы  $Q \neq 0$  согласно табл. 3.4. Для всех указанных случаев провести моделирование. Сделать вывод.

**4.1.4.** Изучить режим раскачки параметрических колебаний в условиях первого резонанса при превышении порога возбуждения, проверить экспоненциальный рост амплитуды.

В панели ввода параметров: 1) оставить значение  $m = 15\%$  и период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,4957$ ; 2) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение»

и задать  $Q = 21,2 = 2Q_{\min}$ ; 3) ввести  $\varphi(0) = 20^\circ$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -0,028$  рад.

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана монитора в таблицу 3.5 величину амплитуды маховика через каждые четыре цикла модуляций момента инерции  $N_T$ .

Проверить экспоненциальный закон роста амплитуды колебаний:

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) \cdot \exp\left(\frac{mN_T}{2}\right). \quad (3.27)$$

Для этого рассчитать отношения  $\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$  всех опытных значений амплитуды и величину экспоненты при каждом  $N_T$ . Сравнить полученные данные и сделать вывод.

Таблица 3.5

Результаты моделирования первого резонанса

$N_T$	0	4	8	12	16
$\varphi(t)$ , град	20				
$\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$	1				
$\exp\left(\frac{mN_T}{2}\right)$	1				

Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование с теми же исходными данными. Изобразить в отчете получившуюся на экране фазовую траекторию параметрических колебаний.

**4.2.** Провести ручное управление параметром системы – моментом инерции маховика.

Включать режим ручного управление момента инерции: в любом из рабочих экранов в панели ввода параметров ставить «галочку» в контрольном боксе «Ручное управление».

Задавать моменты перемещения грузов по стержню, щелкая мышью по кнопке со стрелками или нажимая клавишу «Пробел». Если грузы находятся ближе к центру, то при первом щелчке они смещаются к краям стержня, а при следующем щелчке – возвращаются в прежнее положение к центру симметрии.

**4.2.1.** Провести вручную параметрическую раскачку колебаний маховика.

Наиболее эффективен для раскачки колебаний считается следующий режим работы с параметром. Необходимо вручную

раздвигать грузы, когда угловая скорость маятника минимальна, т. е. при достижении ротора крайних (левых и правых) положений, и сдвигать грузы к центру при максимальной его скорости, т. е. при каждом прохождении ротора положений равновесия.

Зайти в раздел «Физическая система» или «Графики колебаний». В панели ввода: 1) задать глубину модуляции  $m = 15\%$ ; 2) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и ввести добротность системы  $Q = 30$ ; 3) задать  $\varphi(0) = 20^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . На экране задать шкалу времени не менее 20 периодов. Поставить ручное управление параметром.

Провести раскачку колебаний от  $\varphi(0) = 20^\circ$  до  $\varphi(t) = 100^\circ$ . Записать с экрана  $N_T$  – число циклов ручной модуляции момента инерции, за которые это удалось сделать. Увеличить глубину модуляции вдвое и раскачать маятник от  $20^\circ$  до  $100^\circ$ . Результаты для  $N_T$  записать в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Результаты моделирования раскачки колебаний

$m, \%$	$N_T$
15	
30	

**4.2.2.** Провести ручную параметрическое гашение колебаний маятника.

Для наиболее эффективного гашения колебаний следует сдвигать грузы к центру, когда угловая скорость маховика минимальна, т. е. при достижении им всех крайних положений, и раздвигать грузы при максимальной скорости, т. е. всякий раз, когда ротор проходит положение равновесия.

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода: 1) задать значение  $m = 15\%$ ; 2) оставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и

добротность  $Q = 30$ ; 3) ввести  $\varphi(0) = 100^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Шкалу времени на экране задать не менее 12 периодов. Поставить ручное управление параметром.

Нажать клавишу «Пуск» и провести гашение колебаний до отклонения  $\varphi(t) = 20^\circ$ , меняя момент инерции маятника. Записать с экрана  $N_T$  – число циклов ручной модуляции момента инерции, за которые это удалось сделать.

Таблица 3.7

Результаты моделирования гашения колебаний

$m, \%$	$N_T$
15	
30	

Увеличить глубину модуляции вдвое и погасить колебания маятника от  $100^\circ$  до амплитуды  $20^\circ$ . Результаты для  $N_T$  записать в таблицу 3.7.

Перейти в раздел «Энергетические превращения». Повторить гашение колебаний вручную, обратив внимание на процесс уменьшения энергии параметрических колебаний маятника. Сделать вывод.

**4.3.** Изучить параметрические резонансы высоких порядков ( $n > 1$ ).

**4.3.1.** Рассмотреть третий резонанс ( $n = 3$ ) без трения в системе.

Рассмотреть условия возбуждения третьего резонанса в системе без трения, когда период  $T$  модуляции момента инерции ротора близок величине  $\frac{3T_0}{2}$ . Проверить, что амплитуда колебаний увеличивается со временем экспоненциально.

Зайти в раздел «Физическая система» или «Графики колебаний». Вернуться в режим принудительной модуляции параметра, отключив



ручное управление. В панели ввода: 1) ввести глубину модуляции  $m = 5\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 1,5$ ; 3) убрать «Вязкое трение»; 4) задать  $\varphi(0) = 30^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Шкалу времени на экране задать не менее 16 периодов. Провести моделирование. Записать с экрана монитора в табл. 3.8 число циклов  $N_T$  модуляций момента инерции, за которые амплитуда колебаний увеличилась в два раза:  $\varphi_m = 2\varphi(0) = 60^\circ$ .

Таблица 3.8

Результаты моделирования третьего параметрического резонанса без трения

Параметры системы	Результаты моделирования	Результаты расчетов
$m, \%$	$N_T$	$m, \%$
5		
7		
9		

Провести моделирование для всех  $m$  из таблицы 3.8. Используя результаты опытов, рассчитать величины  $m$ , по формуле (3.24). Поученные данные занести в таблицу. Сделать вывод.

**4.3.2.** Изучить пороговые условия возбуждения третьего параметрического резонанса при наличии трения в системе ( $Q \approx Q_{\min}$ ). Промоделировать режим колебаний с постоянной амплитудой.

Зайти в раздел «Графики колебаний». В панели ввода: 1) ввести значение  $m = 15\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 1,487$ ; 3) поставить «Вязкое трение» и задать  $Q = 32$ ; 4) ввести  $\varphi(0) = 20^\circ$  и начальную угловую скорость  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -0,03$  рад.

Нажать кнопку «Пуск» и провести моделирование стационарного режима параметрических колебаний, при котором амплитуда ротора не изменяется и не происходит раскачки колебаний.

Провести моделирование стационарных колебаний при других условиях, указанных в таблице 3.9.

Таблица 3.9

Результаты моделирования стационарного процесса

Параметры системы			Начальные условия		Результаты расчетов
$m, \%$	$\frac{T}{T_0}$	$Q$	$\varphi(0), \text{град}$	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}, \text{рад}$	$Q_{\min}$
15	1,487	32	20	-0,03	
20	1,477	24	30	-0,07	
10	1,494	38	45	-0,01	

Результаты моделирования проверить расчетами по формуле

$$Q_{\min} = \frac{3\pi}{2m} . \quad (3.28)$$

Заполнить таблицу 3.9. Сделать вывод.

#### 4.3.3. Изучить второй резонанс ( $n = 2$ ) без трения в системе.

Рассмотреть условия возбуждения второго резонанса в системе без трения, при котором период  $T$  модуляции момента инерции близок к  $T_0$  – величине периода собственных колебаний маховика. Проверить экспоненциальный закон роста амплитуды колебаний со временем:

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) \cdot \exp(m^2 N_T) . \quad (3.29)$$

В панели ввода параметров: 1) ввести глубину модуляции  $m = 20\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,9848$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать начальные данные  $\varphi(0) = 10^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Шкалу времени на экране задать не менее 16 периодов. Провести моделирование, записывая с экрана через каждые два  $N_T$  величины амплитуды колебаний  $\varphi_m(t)$ . Теоретические расчеты сделать по формуле (3.29) для всех  $N_T$ . Заполнить таблицу 3.10. Сравнить данные эксперимента и расчетов. Сделать вывод.

Таблица 3.10

Результаты моделирования второго резонанса без трения

$N_T$	0	2	4	6	8	10	12	14
моделирование $\varphi_m(t)$								
расчеты $\varphi_m(t)$								

**4.3.4.** Изучить режим раскачки параметрических колебаний в условиях второго резонанса при превышении порога возбуждения, проверить для этого случая медленный рост амплитуды ротора.

В панели ввода параметров: 1) задать глубину модуляции параметра  $m = 20\%$  и период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,9848$ ; 2) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и задать добротность системы  $Q = 200$ ; 3) ввести начальный угол  $\varphi(0) = 20^\circ$  и начальную угловую скорость ротора  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана монитора в таблицу 3.11 величины амплитуды маятника через каждые два цикла модуляций параметра  $N_T$ .

Проверить медленный экспоненциальный закон роста амплитуды:

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) \cdot e^x, \quad (3.30)$$

где 
$$x = N_T \left( m^2 - \frac{\pi}{Q} \right). \quad (3.31)$$

Для этого рассчитать: 1) отношения всех опытных значений амплитуды при каждом  $N_T$  к начальному углу  $\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$ ; 2) теоретическую величину  $e^x$  (см. 3.31) по величинам  $m$ ,  $Q$  и  $N_T$ . Сравнить полученные данные, заполнив две последние строки табл. 3.11.

Таблица 3.11

Результаты моделирования второго резонанса

$N_T$	0	2	4	6	8	10	12	14
$\varphi_m(t)$ , град	20							
$\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$	1							
$e^x$	1							

### 5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение параметрических колебаний. Приведите примеры колебательных систем, где они возможны.
2. Объясните параметрические колебания торсионного осциллятора.
3. Напишите выражение для закона сохранения момента импульса стержня при перемещении грузов. Поясните входящие в выражение величины.
4. Запишите условие для основного параметрического резонанса.
5. Объясните термин «пороговый режим» параметрического резонанса. Когда в осцилляторе возникает такой режим колебаний?
6. Как зависит величина пороговой добротности системы от глубины модуляции?
7. Что называют интервалом параметрической неустойчивости? Какова причина разброса значений периода модуляции?

**Лабораторная работа №7**  
**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПЛАВНОЙ**  
**МОДУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРА**

**1. Цель работы**

Изучить параметрические колебания линейного осциллятора при плавной модуляции момента инерции.

**2. Порядок оформления отчета**

1. При подготовке к работе составить конспект из 3–4 страниц текста, Конспект должен содержать основные теоретические сведения к работе (физические термины и формулы) и рисунок изучаемой системы. Для составления конспекта необходимо использовать теоретические сведения к Разделу 3 и описание данной работы.
2. В отчет включить таблицы с данными моделирования и результатами расчетов. В конце отчета записать выводы к работе.

Таблица 3.12

Обозначения используемых в работе физических величин

Обозначение	Величина
$\varphi(0)$	Начальный угол отклонения маховика
$\dot{\varphi}(0)$	Начальная угловая скорость маховика
$\frac{T}{T_0}$	Период модуляции (период колебания момента инерции) в единицах периода собственных колебаний ротора
$\tilde{m}$	Глубина модуляции момента инерции
$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$	Начальная угловая скорость в относительных единицах собственной частоты ротора
$Q$	Добротность системы (при наличии трения)

### 3. Описание физической системы

В лабораторной работе изучают параметрические колебания торсионного пружинного осциллятора (рис. 3.3). В рассматриваемой системе крутильные колебания ротора возбуждаются потому, что ротор получает энергию от источника, который осуществляет принудительное синусоидальное движение грузов вдоль стержня вдоль стержня на расстояние  $l(t)$  друг от друга:

$$l(t) = l_0(1 + \tilde{m} \sin \omega t) . \quad (3.32)$$

Здесь  $l_0$  – среднее расстояние грузов от оси вращения,  $l_0 \tilde{m}$  – амплитуда смещения грузов,  $\tilde{m} < 1$  – глубина модуляции смещения (момента инерции ротора).

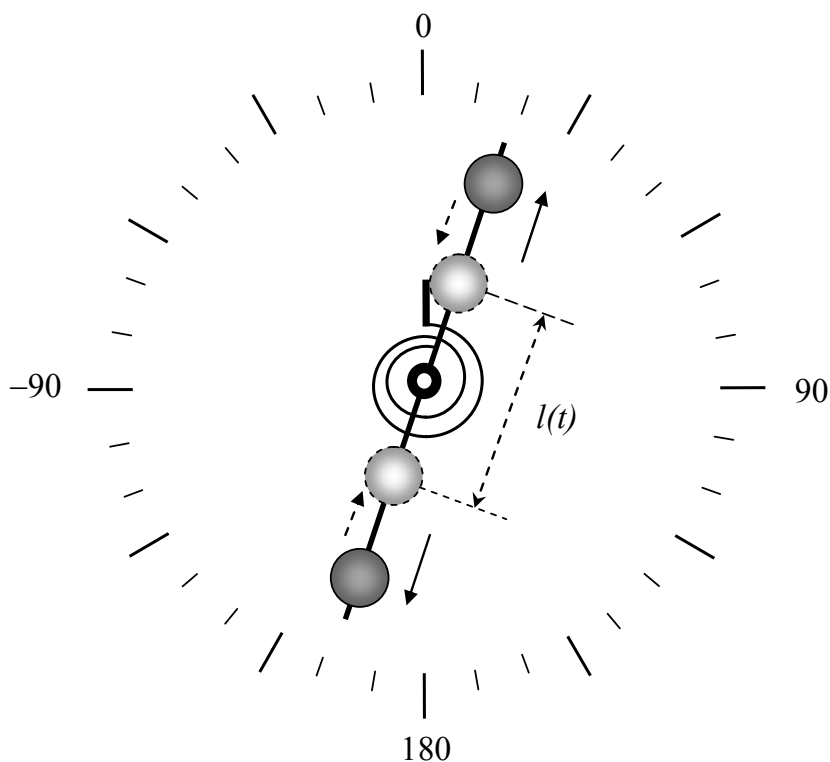


Рис.3.3. Торсионный пружинный осциллятор с плавной модуляцией момента инерции маховика

Под действием гармонической модуляции момента инерции маховика происходит постепенная раскачка его колебаний. Условием

возбуждения параметрического резонанса является кратность периода смещения грузов  $T$  величине периода собственных колебаний ротора  $T_0$ :

$$T = n \frac{T_0}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.33)$$

#### 4. Порядок выполнения работы

4.1. Изучить основной параметрический резонанс ( $n = 1$ ).

4.1.1. Рассмотреть основной резонанс ( $n = 1$ ) в отсутствие трения.

Изучить условия возбуждения основного резонанса в системе без трения, когда период плавной  $T$  модуляции момента инерции ротора близок по величине к половине периода  $T_0$  собственных колебаний. Проверить экспоненциальный закон увеличения со временем амплитуды колебаний.

Зайти в раздел «Физическая система». В панели ввода: 1) ввести значение глубины модуляции  $\tilde{m} = 10\%$ ; 2) задать период модуляции момента инерции  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать начальный угол  $\varphi(0) = 5^\circ$  и начальную угловую скорость ротора  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажав кнопку «Пуск», провести моделирование. Записать с экрана монитора в таблицу 3.13 число циклов  $N_T$  модуляций момента инерции, за которые амплитуда колебаний ротора увеличилась в пять раз, и величину получившейся амплитуды ( $\varphi_m \approx 5\varphi(0)$ ).

Провести моделирование при других  $\tilde{m}$  и начальных углах, указанных в таблице. Оценить величины  $N_T$  по заданным величинам  $\tilde{m}$ :

$$N_T = \frac{2 \ln 5}{\pi \tilde{m}}. \quad (3.34)$$

Результаты расчетов занести в табл. 3.13. Сделать вывод.

Таблица 3.13

Результаты моделирования основного параметрического резонанса без трения

Параметры системы	Начальные условия	Результаты моделирования		Результаты расчетов
		$N_T$	$\varphi_m$ , град	
$\tilde{m}$ , %	$\varphi(0)$ , град			$N_T$
10				
15				
20				

Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование для одного из входного набора параметров. В отчете изобразить рисунок фазовой траектории параметрических колебаний осциллятора.

Зайти в раздел «Графики колебаний». Провести моделирование колебаний с указанными в таблице 3.14 данными для системы. С экрана монитора записать число циклов  $N_T$  модуляций момента инерции, за которые амплитуда колебаний ротора увеличилась в четыре раза, и величину получившейся амплитуды ( $\varphi_m \approx 4\varphi(0)$ ).

Таблица 3.14

Результаты моделирования основного параметрического резонанса без трения

Параметры системы	Начальные условия	Результаты моделирования		Результаты расчетов
		$N_T$	$\varphi_m$ , град	
$\tilde{m}$ , %	$\varphi(0)$ , град			$\tilde{m}$ , %
7,4	5			
5,5	6			
8,8	4			

Рассчитать  $\tilde{m}$  по полученным в моделировании величинам  $N_T$ :

$$\tilde{m} = \frac{2 \ln 4}{\pi N_T} . \quad (3.35)$$

Результаты расчетов занести в табл. 3.14. Сделать вывод.



**4.1.2.** Изучить пороговые условия возбуждения основного резонанса при трении в системе. Провести моделирование стационарных колебаний.

Увеличение энергии колебаний за счет плавных изменений момента инерции компенсируется потерями энергии колебаний из-за трения при пороговом значении добротности  $Q_{\min}$ . При этом амплитуда колебаний маховика остается стационарной, т. е. не изменяется.

По величинам  $\tilde{m}$ , данных в таблице 3.15, рассчитать  $Q_{\min}$ :

$$Q_{\min} = \frac{1}{\tilde{m}}. \quad (3.36)$$

В панели ввода параметров: 1) ввести значение  $\tilde{m} = 10\%$ ; 2) задать период модуляции:  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и задать рассчитанное значение для  $Q_{\min}$ ; 4) ввести  $\varphi(0) = 20^\circ$  и начальную угловую скорость  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажать кнопку «Пуск» и проверить существование порогового режима колебаний, когда  $\varphi(0) \approx \varphi_m(t) = const$ . Чтобы получить такой режим, необходимо вручную подобрать значение добротности  $Q_{\text{пор}}$ , которое чуть больше рассчитанной величины  $Q_{\min}$ . Занести подобранное значение в таблицу. Проверить пороговый режим при других  $\tilde{m}$ .

Таблица 3.15

Результаты моделирования порогового режима

Ввод	Результаты расчетов	Моделирование
$\tilde{m}, \%$	$Q_{\min}$	$Q_{\text{пор}}$
10		
15		
20		

**4.1.3.** Изучить режим параметрической раскачки колебаний осциллятора при превышении порога возбуждения ( $Q > Q_{\min}$ ).

В этом случае увеличение энергии колебаний из-за модуляции момента инерции превышает потери энергии колебаний в системе. При этом амплитуда ротора за время циклов  $N_T$  модуляций момента инерции увеличивается экспоненциально:

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) \cdot \exp\left(\frac{\tilde{m}\pi N_T}{4}\right). \quad (3.37)$$

Провести наблюдение за изменениями амплитуды маховика. В панели ввода параметров: 1) ввести глубину модуляции  $\tilde{m} = 10\%$ ; 2) задать  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) поставить «галочку» в боксе «Вязкое трение» и задать  $Q = 20$ ; 4) ввести  $\varphi(0) = 4^\circ$  и  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Провести моделирование колебаний. Записать с экрана монитора в таблицу 3.16 величину амплитуды ротора через каждые два цикла модуляций момента инерции  $N_T$ .

Таблица 3.16

Результаты моделирования раскачки амплитуды при первом резонансе

$N_T$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$\varphi_m(t)$ , град	4								
$\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$	1								
$\exp\left(\frac{\tilde{m}\pi N_T}{4}\right)$	1								

Рассчитать отношения  $\frac{\varphi_m(t)}{\varphi(0)}$  для всех опытных значений амплитуды и величину экспоненты (см. (3.37)) при каждом  $N_T$ . Сравнить полученные данные и сделать вывод.

Зайти в раздел «Фазовая траектория». Провести моделирование с теми же исходными данными. Изобразить в отчете получившуюся на экране фазовую траекторию параметрических колебаний.

**4.1.4.** Проверить стационарный режим колебаний на основном интервале параметрического резонанса в отсутствие трения.

Параметрический резонанс возможен при неточной настройке на резонанс, когда величина периода модуляции лежит в интервале значений, который называют интервалом параметрической неустойчивости. Начальные условия (начальный угол отклонения ротора и его начальная угловая скорость) на границах интервала неустойчивости задают возможность получения стационарного режима – колебания ротора с постоянной амплитудой.

Заполнить таблицу 3.17, сделав расчеты для левой и правой границ периода основного резонанса при разных параметрах модуляции  $\tilde{m}$ :

$$T_- = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{m}}{2} - \frac{7}{16} \tilde{m}^2 \right) T_0 ; \quad T_+ = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{m}}{2} - \frac{7}{16} \tilde{m}^2 \right) T_0 . \quad (3.38)$$

Таблица 3.17

Расчеты для левой и правой границ интервалов неустойчивости

$\tilde{m}, \%$	$T_- / T_0$	$T_+ / T_0$
10		
15		
20		

Провести моделирование стационарного режима колебаний на левой границе интервала параметрического резонанса. Предварительно заполнить третий столбец таблицы 3.18: для всех  $\tilde{m}$  рассчитать значения начальных угловых скоростей, при которых должны быть стационарные колебания:

$$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = \varphi(0)(1 - \tilde{m}) . \quad (3.39)$$

В уравнении (3.39) величина начального угла должна быть переведена в радианы.

В панели ввода параметров: 1) ввести глубину модуляции  $\tilde{m} = 10\%$ ; 2) задать  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать начальный угол отклонения ротора  $\varphi(0) = 30^\circ$ .

Нажать кнопку «Обновить информацию», находящуюся внизу текущего окна. В правой части экрана появятся данные для ширины периода параметрического резонанса. Задать соответствующее численное значение для левой границы интервала  $\frac{T}{T_0}$  и рассчитанное значение  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$  в параметрах ввода в боксе слева.

Таблица 3.18

Проверка стационарного режима колебаний на левой границе интервала

Параметры системы	Начальные условия	Результаты расчетов	Результаты моделирования	
			$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад
$\tilde{m}$ , %	$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад		
10	30			
15	45			
20	60			

Нажмите кнопку «Пуск» и проверьте, будут ли наблюдаться стационарные колебания, при которых амплитуда маховика не меняется. Чтобы добиться стационарного режима, необходимо, немного изменяя заданное значение  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , несколько раз провести моделирование. Занести

подобранное значение для угловой скорости в таблицу 3.18. Провести опыты при других данных. Заполнить таблицу и сделать вывод.

Провести моделирование стационарного режима колебаний на правой границе интервала параметрической неустойчивости. Предварительно заполнить третий столбец таблицы 3.19: для всех  $\tilde{m}$  рассчитать значения начальных угловых скоростей, при которых должен быть стационарный режим колебаний:

$$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -\varphi(0)(1 + \tilde{m}) . \quad (3.40)$$

В панели ввода параметров: 1) ввести  $\tilde{m} = 10\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 0,5$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать

$\varphi(0) = 30^\circ$ . Нажать кнопку «Обновить информацию», находящуюся внизу текущего окна. В правой части экрана найти значение для ширины периода параметрического резонанса. В параметрах ввода в боксе слева ввести численные значения для правой границы интервала  $\frac{T_+}{T_0}$  и рассчитанную величину угловой скорости  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ .

Таблица 3.19

Проверка стационарного режима колебаний на правой границе интервала

Параметры системы	Начальные условия	Результаты расчетов	Результаты моделирования	
$\tilde{m}, \%$	$\varphi(0), \text{град}$	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}, \text{рад}$	$\frac{T_+}{T_0}$	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}, \text{рад}$
10	30			
15	45			
20	60			

Нажмите кнопку «Пуск» и проверьте соблюдение условия стационарности колебаний, при котором амплитуда маховика не меняется. Для этого несколько раз провести моделирование, вручную подобрав значение  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$  так, чтобы получить стационарный режим. Занести полученное значение для угловой скорости в табл. 3.19. Провести опыты при других данных. Заполнить таблицу и сделать вывод.

#### 4.2. Рассмотреть второй резонанс ( $n = 2$ ) в отсутствие трения.

Изучить в системе без трения условия возбуждения второго резонанса, при котором период  $T$  модуляции момента инерции близок к  $T_0$  – величине периода собственных колебаний маятника.

**4.2.1.** Проверить стационарный режим колебаний на границах интервала неустойчивости второго резонанса.

В панели ввода параметров: 1) ввести глубину модуляции  $\tilde{m} = 30\%$ ; 2) задать период модуляции  $\frac{T}{T_0} = 1$ ; 3) убрать «галочку» в боксе «Вязкое трение»; 4) задать предварительное значение начального угла  $\varphi(0) = 12^\circ$  и точное значение  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = 1$  рад.

Нажать кнопку «Обновить информацию», находящуюся внизу текущего окна. В правом окне найти данные для ширины периода параметрического резонанса. Задать соответствующее численное значение для левой границы интервала  $\frac{T}{T_0}$  в боксе параметров ввода слева.

Еще раз нажать кнопку «Обновить информацию». Задать с экрана рекомендуемый начальный угол отклонения ротора  $\varphi(0)$ , записать его величину в таблицу 3.20. Провести моделирование с этим углом.

Оценить величины  $\frac{T}{T_0}$  и  $\varphi(0)$  по формулам:

$$T_- = \left(1 - \frac{13}{24} \tilde{m}^2\right) T_0, \quad \varphi(0) = \frac{2}{3} \tilde{m} \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}. \quad (3.41)$$

Заполнить таблицу 3.20.

Таблица 3.20

Проверка стационарного режима колебаний на левой границе интервала

Параметры системы	Начальные условия		Результаты моделирования	Результаты расчетов	
	$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад		$T_- / T_0$	$T_- / T_0$
$\tilde{m}$ , %					
30		1			

В панели ввода параметров задать точное значение  $\varphi(0) = 40^\circ$  и предварительное значение  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -0,3$  рад. Нажать кнопку «Обновить информацию», находящуюся внизу текущего окна. В правой части экрана найти обновленные данные для ширины периода параметрического резонанса. Задать соответствующее численное значение для правой границы  $T_+ / T_0$  в боксе параметров слева.

Еще раз нажать кнопку «Обновить информацию». Задать с экрана рекомендуемую начальную скорость ротора  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , записать ее величину в таблицу 3.21. Провести моделирование с этой скоростью.

Оценить величины  $T_+ / T_0$  и  $\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$  по формулам:

$$T_+ = \left(1 - \frac{7}{24} \tilde{m}^2\right) T_0, \quad \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0} = -\frac{4}{3} \tilde{m} \varphi(0). \quad (3.42)$$

Здесь  $\varphi(0)$  – в радианах. Заполнить таблицу 3.21.

Таблица 3.21

Проверка стационарного режима колебаний на правой границе интервала

Параметры системы	Начальные условия		Результаты моделирования	Результаты расчетов	
	$\varphi(0)$ , град	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад		$T_+/T_0$	$\frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega_0}$ , рад
$\tilde{m}$ , %	40				
30	40				

**4.2.2.** Проверить экспоненциальный закон роста амплитуды колебаний за время циклов модуляций  $N_T$ :

$$\varphi_m(t) = \varphi(0) \cdot \exp\left(\frac{\tilde{m}^2 N_T}{2}\right). \quad (3.43)$$

В панели ввода параметров: 1) ввести  $\tilde{m} = 30\%$ ; 2) задать начальный угол отклонения  $\varphi(0) = 20^\circ$  и начальную угловую скорость маятника  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Нажать кнопку «Обновить информацию», находящуюся внизу текущего окна. В правой части найти обновленные данные для резонансного периода модуляции. Задать соответствующее численное значение для периода точной настройки на резонанс в боксе параметров слева.

Провести моделирование, записывая с экрана каждые два цикла модуляций  $N_T$  величины для амплитуды колебаний  $\varphi_m(t)$ .

Таблица 3.22

Результаты моделирования второго резонанса без трения

$N_T$	0	2	4	6	8	10	12	14
моделирование $\varphi_m(t)$ , град								
расчеты $\varphi_m(t)$ , град								



Теоретические расчеты сделать по формуле (3.43) для всех  $N_T$ .  
Заполнить табл. 3.22. Сравнить данные эксперимента и расчетов.  
Сделать вывод.

### **5. Контрольные вопросы**

1. Объясните параметрические колебания торсионного осциллятора.
2. Напишите выражения для плавной модуляции параметра и условие параметрического резонанса. Поясните входящие величины.
3. Объясните термин «пороговые условия» параметрического резонанса. В каких случаях параметрические колебания стационарны?
4. Что называют интервалом параметрической неустойчивости? Какова причина увеличения этого интервала значений для периода модуляции?

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Савельев, И. В. Курс общей физики : учебное пособие. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : «Лань», 2006. – 432 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики : учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высшая школа, 2002. – 718 с.
3. Валишев, М. Г. Курс общей физики : учебное пособие для втузов / М. Г. Валишев, А. А. Познер. – М. : Лань, 2010. – 573 с.
4. Рекомендуемые электронные ресурсы  
[http://www.ph4s.ru/book\\_ab\\_ph\\_theor.html](http://www.ph4s.ru/book_ab_ph_theor.html) (дата обращения: 20.12.2012)  
<http://www.techlibrary.ru> (дата обращения: 20.12.2012)

Учебное электронное издание

### **ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ**

Методические указания

Составитель **НОВИКОВА Татьяна Анатольевна**

Редактор **Н.А. Евдокимова**

Формат А4. Усл. печ. л. 7,16.  
Объем данных 0,71 Мб. ЭИ № 74.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.

Тел.: (8422) 778-113.

Е-mail: [venec@ulstu.ru](mailto:venec@ulstu.ru)

<http://www.venec.ulstu.ru>