

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

В.Н. Кокорин, А.А. Григорьев, В.И. Филимонов, Н.А. Сизов, А.В. Кокорин

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ  
КОМПАКТНЫХ И ПОРОШКОВЫХ ТЕЛ**

Учебное пособие

Ульяновск  
УлГТУ  
2012

УДК 621.771+621.892+661.185(075)

ББК 34.62 я 7

Э 34

Рецензенты:

канд. техн. наук, зам. ген. директора ОАО «Ульяновский  
НИАТ» М. В. Илюшкин;

зам. главного технолога ОАО «УАЗ» С.П. Макаров

*Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

Авторы: В.Н. Кокорин,  
А.А. Григорьев,  
В.И. Филимонов,  
Н.А. Сизов,  
А.В. Кокорин

Э 34 **Энергетический метод решения технологических задач  
обработки давлением компактных и порошковых тел**: учебное  
пособие / В. Н. Кокорин, А. А. Григорьев, В. И. Филимонов и др. –  
Ульяновск: УлГТУ, 2012. – 67 с.

ISBN 978-5-9795-1074-3

В учебном пособии представлен энергетический метод, используемый при решении различных задач процессов обработки металлов давлением компактных и пористых порошковых тел. Рассмотрен ряд схем нагружения, приведен алгоритм определения энергосиловых режимов нагружения.

Пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Машиностроение» и может быть использовано при изучении дисциплин «Теория обработки металлов давлением», «Технология листовой и объемной холодной штамповки», «Технологияковки и горячей объемной штамповки», «Прокатка».

Подготовлено на кафедре «Материаловедение и ОМД».

УДК 621.771+621.892+661.185(075)

ББК 34.62 я 7

© Кокорин В. Н., Григорьев А. А.  
Филимонов В. И., Сизов Н. А.,  
Кокорин А. В., 2012

© Оформление. УлГТУ, 2012

ISBN 978-5-9795-1074-3

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	4
<b>1 Основные сведения из механики деформируемых твердых тел</b>	5
1.1 Тензор напряжений и дифференциальные уравнения равновесия	5
1.2 Интегральные условия равновесия	10
1.3 Главные напряжения	13
1.4 Преобразование компонент тензора напряжений и интерпретация вида напряженного состояния	16
1.5 Понятие интенсивности напряжений	19
1.6 Круговая диаграмма напряжений Мора	20
1.7 Плоская задача теории пластичности	22
1.8 Движение сплошной среды. Деформации	25
1.9 Условие совместности деформаций	29
1.10 Модели пластического формоизменения и условия пластичности	33
1.11 Физические уравнения теории пластичности	37
<b>2 Основные уравнения прикладной теории пластического течения</b>	40
2.1 Напряжения, деформации и скорости деформации. Кинематика течения	40
2.2 Статика деформируемого тела	41
2.3 Физические уравнения связи напряжений, скоростей и скоростей деформаций	42
2.4 Условие пластичности	42
2.5 Работа и мощность деформации	42
2.6 Граничные условия. Контактное трение	43
<b>3 Энергетический метод решения технологических задач процессов ОМД</b>	45
3.1 Вариационные (энергетические) принципы механики деформируемого тела. Принцип возможных изменений действительного поля скоростей	45
3.2 Общая схема решения технологических задач пластического течения с применением энергетических принципов и прямого вариационного метода Ритца	46
3.3 Преимущественно пластическое деформирование увлажненной порошковой смеси	54
<b>Заключение</b>	64
<b>Контрольные вопросы</b>	65
<b>Библиографический список</b>	67

## **ВВЕДЕНИЕ**

Основной задачей, решаемой отечественной промышленностью, является изготовление высококачественных деталей с наименьшими трудозатратами, с наибольшей производительностью и максимальным КИМ. Успешное решение этой задачи возможно на основе внедрения современных прогрессивных технологических процессов обработки металлов давлением. Следует отметить, что процессы ОМД относятся к сложным по технологическим параметрам и часто требуют значительных затрат на опытную и экспериментальную обработку. Таким образом, анализ условий деформирования металла в процессах ОМД является актуальной задачей, позволяющей улучшить качество инженерных разработок на стадии проектирования и подготовки производства, прежде всего, за счет исследования прикладных методов расчета энергосиловых параметров нагружения.

В теории ОМД для анализа кинематических, и силовых особенностей формоизменения широко используется энергетический метод расчета, основанный на экспериментальных принципах теории пластичности, который можно считать наиболее универсальным приемом для решения задач пластического деформирования. Энергетический метод позволяет исследовать процессы любой сложности и несмотря на довольно приблизительное представление характера течения металла, дает достаточно точные результаты.

# 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В настоящем разделе приводятся основные сведения, относящиеся к моделированию в механике деформируемых твердых тел (МДТТ), преимущественно в приложении к пластическому формоизменению порошковых уплотняемых сред [1].

## 1.1. Тензор напряжений и дифференциальные уравнения равновесия

### *Внешние силы и компоненты вектора напряжений на наклонной площадке*

На деформируемое тело действуют внешние силовые факторы. Эти факторы могут быть поверхностными или объемными. Рассмотрим некое деформируемое тело, рассеченное плоскостью (рис. 1.1).

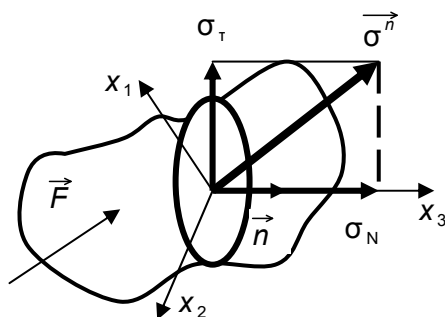


Рис. 1.1. К определению вектора напряжений

Зададим направление  $\vec{n}$  для полученной площадки среза. Выделим элементарную площадку среза  $dA$ , на которую действует внешняя сила  $d\vec{F}$ , и определим вектор напряжений  $\vec{\sigma}^n$ :

$$\vec{\sigma}^n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dA}. \quad (1.1)$$

Свяжем площадку с системой координат, у которой две оси будут лежать в плоскости площадки, а одна – перпендикулярно к ней. Пусть вектор напряжений располагается под некоторым углом по отношению к оси  $x_3$ . Очевидно, можно определить проекцию данного вектора напряжений на нормаль  $\vec{n}$  к площадке, совпадающей с осью  $x_3$ . Тогда модуль вектора напряжений может быть связан с нормальным  $\sigma_N$  и касательным  $\sigma_\tau$  напряжением следующей зависимостью:

$$|\vec{\sigma}^n| = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_\tau^2}. \quad (1.2)$$

Вектор напряжений  $\vec{\sigma}^n$  может быть разложен по проекциям, а проекции могут быть соответствующим образом обозначены через их абсолютные величины и орты осей (рис. 1.2):

$$\vec{\sigma}^n = \vec{e}_i \cdot \sigma_i^n, \quad (1.3)$$

где  $\vec{e}_i$  – орты осей;  $\sigma_i^n$  – проекции вектора напряжений на соответствующие оси.

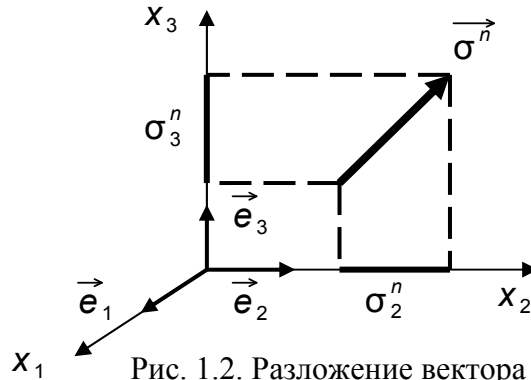


Рис. 1.2. Разложение вектора напряжений на составляющие

В записи (1.3) использовано **правило Эйнштейна**: если в записи при умножении индексированных объектов имеет место совпадение двух индексов, то по ним производится суммирование. Ниже дана иллюстрация правила Эйнштейна.

$$\vec{e}_j \cdot \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \cdot \sigma_{ij} = \vec{e}_1 \cdot \sigma_{i1} + \vec{e}_2 \cdot \sigma_{i2} + \vec{e}_3 \cdot \sigma_{i3}. \quad (1.4)$$

На основании формулы (1.4) вектор напряжений  $\vec{\sigma}^n$  (см. формулу (1.3)) в связи с коммутативностью множителей имеет вид:

$$\vec{\sigma}^n = \sigma_1^n \vec{e}_1 + \sigma_2^n \vec{e}_2 + \sigma_3^n \vec{e}_3 = \sigma_i^n \vec{e}_i. \quad (1.5)$$

Направляющий (единичный) вектор  $\vec{n}$  в разложении по триаде орт имеет вид:

$$n = \vec{n}_i \cdot \vec{e}_i, \quad (1.6)$$

где  $n_i$  – направляющие косинусы.

Если вектор  $\vec{K}$ , определяющий положение площадки, не единичный, то он подлежит нормировке по формуле:

$$\vec{n} = \frac{K_i \cdot \vec{e}_i}{|\vec{K}|}, \quad (1.7)$$

где  $K_i$  – компоненты вектора.

Покажем, что компоненты направляющего вектора в формуле (1.6) действительно являются направляющими косинусами, для чего умножим скалярно это уравнение на какой-либо орт, например,  $\vec{e}_k$ :

$$\vec{e}_k \cdot \vec{n} = n_i \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k}_{\delta_{ik}}, \quad (1.8)$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронеккера.

Ввиду единичности модуля орт, **символ Кронеккера** определяется таким образом:

$$\delta_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}. \quad (1.9)$$

Свойство символа Кронеккера:

$$n_i \delta_{ik} = n_k, \quad (1.10)$$

т.е. он производит замену (поднятие) индекса. Покажем, что формула (1.10) справедлива, взяв, например,  $k = 1$ :

$$v_i \delta_{i1} = v_1 \delta_{11} + v_2 \delta_{21} + v_3 \delta_{31} = v_1,$$

поскольку  $\delta_{11} = 1$ ;  $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$ .

Очевидно, аналогичные соотношения можно получить и для других значений « $k$ ».

С другой стороны, формула (1.8) может быть представлена в ином виде:

$$\vec{n} \vec{e}_k = |\vec{n}| |\vec{e}_k| \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k) = n_k = \cos(\vec{n} \cdot \vec{e}_k),$$

откуда видно, что компоненты направляющего вектора действительно представляют собой косинусы углов между нормалью к площадке и направлением соответствующей оси системы координат.

### **Напряжения на наклонной к осям координат площадке**

Рассмотрим напряжения, действующие на четырехгранник (рис. 1.3) с целью определения компонент вектора напряжений, приложенного к наклонной площадке. Пусть  $dA$  – площадь наклонной грани;  $dA_1, dA_2, dA_3$  – площади граней, расположенных перпендикулярно соответствующим координатным осям. Очевидно, площади индексированных граней можно выразить через площадь наклонной грани:

$$dA_i = dA \cdot \cos \alpha_i = dA \cdot n_i, \quad (1.11)$$

где  $\alpha_i$  – угол между наклонной площадкой и осью системы координат, т.е. направляющий косинус.

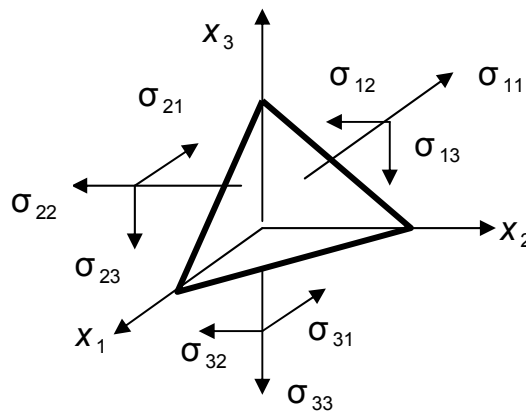


Рис. 1.3. Действие напряжений на наклонной площадке

Найдем проекцию всех сил, действующих на данную треугольную пирамиду, на какую-либо из осей, например, ось  $x_1$ :

$$x_1: \sigma_1^n \cdot dA - \sigma_{11} \cdot dA_1 - \sigma_{21} \cdot dA_2 - \sigma_{31} \cdot dA_3 = 0. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) в формулу (1.12), получим:

$$\sigma_1^n = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = \sigma_{i1}n_i = \sigma_{k1}n_k,$$

откуда, с учетом правила суммирования Эйнштейна и обобщения на произвольную ось, имеем окончательно:

$$\sigma_j^n = \sigma_{ij}n_j, \quad (1.13)$$

где  $j$  – свободный индекс.

Величины  $\sigma_j^n$  являются составляющими полного вектора напряжений  $\vec{\sigma}^n$  на ось  $x_j$ , а компоненты тензора напряжений, являются функциями координат:  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ , т.е. они изменяются при переходе от одной точки к другой.

### ***Дифференциальные уравнения равновесия и закон парности касательных напряжений***

Для вывода уравнений равновесия и закона парности касательных напряжений рассмотрим элементарный кубик с компонентами напряжений на его гранях (рис. 1.4). Так как компоненты напряжений являются функциями координат, то при переходе из начала координат в какую-либо точку должно возникать приращение этих компонентов.

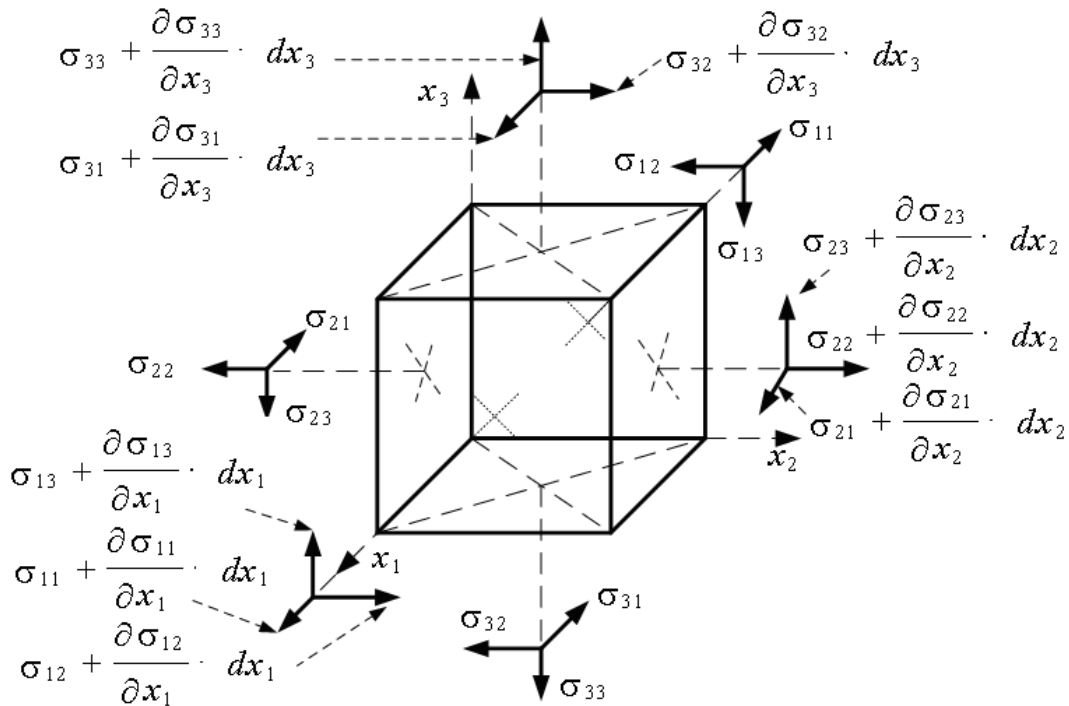


Рис. 1.4. Компоненты напряжений на гранях кубика

Для выполнения условия равновесия кубика должны выполняться два условия:

1. Равенство равнодействующей силы нулю:  $\vec{F}^R = 0 \Rightarrow \vec{F}_i^R = 0$ .
2. Равенство результирующего момента нулю:  $\vec{M}^R = 0; \Rightarrow M_i^R = 0$ .



Найдем проекции всех сил, например, на ось  $x_1$ , с учетом того, что кроме действия поверхностных сил на выделенный объем действуют также массовые силы (сила тяжести, магнитные силы, силы инерции). Массовые силы будем обозначать  $\vec{f}^M$  с соответствующими компонентами. Проецируя все силы на одну из осей и удерживая члены третьего порядка малости по приращению координат, например  $x_1$ , получим:

$$f_1^M + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0. \quad (1.14)$$

Свернем данное выражение, учитывая правило суммирования по первому индексу компонент напряжений:

$$x_1: f_1^M + \frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j} = 0.$$

С учетом аналогичных уравнений для осей  $x_2$  и  $x_3$ , получаем уравнения равновесия для всех осей:

$$f_i^M + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{или} \quad f_i^M + \sigma_{ji,j} = 0. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) представляет собой **уравнения равновесия** элементарного объема **в дифференциальной форме**.

Обратимся ко второму условию, выражающему равенство результирующего момента нулю. Будем рассматривать вращение кубика относительно одной из осей, например, оси  $x_1$ . Компоненты тензора напряжений, параллельные оси  $x_1$ , вклада в проекцию момента давать не будут. Расположим наблюдателя в начале системы координат лицом по направлению оси  $x_1$ . Момент считаем положительным, если вращение осуществляется по часовой стрелке и отрицательным – в противном случае.

$$\vec{M} = \left[ \vec{r} \vec{f} \right].$$

$$\begin{aligned} x_1: & \sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_3}{2} - \left( \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \cdot dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} - \sigma_{13} dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \\ & + \left( \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \cdot dx_1 \right) \cdot dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \sigma_{22} dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} - \left( \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \cdot dx_2 \right) \cdot dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_3}{2} + \\ & + \left( \sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right) \cdot dx_1 dx_2 dx_3 - \sigma_{33} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} + \left( \sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \cdot dx_3 \right) \cdot dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} - \\ & - \left( \sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая в последней формуле членами, содержащими бесконечно-малые величины четвертого порядка, получим:

$$(\sigma_{23} - \sigma_{32}) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0,$$

или с учетом произвольности приращений координат:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} . \quad (1.16)$$

Получая аналогичные соотношения для других осей и производя обобщение, можно записать **закон парности касательных напряжений**:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (1.17)$$

Из формулы (1.17) следует, что тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали.

## 1.2. Интегральные условия равновесия

### *Теоремы, используемые при преобразовании интегральных условий равновесия*

Приведем теоремы, полезные для дальнейшего рассмотрения.

а) **Теорема Гаусса:**

$$\int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} dV , \quad (1.18)$$

где  $\vec{B}$  – некий вектор;  $d\vec{A}$  – элементарная площадка, которая определяется  $d\vec{A} = dA \cdot \vec{n}$ .

Дивергенция в формуле (1.18) определяется следующим образом:

$$\text{div} = \vec{e}_m \frac{\partial}{\partial x_m} ,$$

где  $\vec{e}_m$  – единичный вектор, совпадающий с направлением оси  $m$ .

С учетом последнего правая часть формулы (1.18) приобретает вид

$$\int_V \vec{e}_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_m} dV = \int_V \frac{\partial (\vec{B} \vec{e}_m)}{\partial x_m} dV = \int_V \frac{\partial B_m}{\partial x_m} dV .$$

Тогда теорему Гаусса (1.18) в тензорном представлении можно сформулировать в следующем виде:

$$\int_A B_i n_i dA = \int_V B_{i,i} dV . \quad (1.19)$$

б) **Теорема Остроградского:**

$$\int_A [\vec{B} d\vec{A}] = \int_V \text{rot} \vec{B} dV , \quad (1.20)$$

где  $\text{rot}$  – дифференциальный оператор, имеющий вид:

$$\text{rot} \vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} .$$

С учетом определения элементарной площадки формулу (1.20) можно переписать в следующем виде:

$$\int_A [\vec{B} \vec{n}] \cdot dA = \int_V \text{rot} \vec{B} dV . \quad (1.21)$$

Производя переход к символьному представлению в векторном произведении интеграла левой части, получаем для  $i$ -й компоненты:

$$i : [\vec{B} \vec{n}]_j = \varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot n_k , \quad (1.22)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  – (псевдо) **тензор Леви-Чивиты**, который определяется так:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ – образуют циклическую перестановку;} \\ -1 & i, j, k \text{ – образуют антициклическую перестановку;} \\ 0 & \text{два и более индексов совпадают.} \end{cases}$$

Для доказательства возможности представления (1.22), рассмотрим векторное произведение:

$$[\vec{B}\vec{C}] = \vec{e}_1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{pmatrix} + \vec{e}_2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{pmatrix} + \vec{e}_3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}.$$

То же самое векторное произведение с использованием **псевдотензора Леви-Чивиты** можно представить в покомпонентном виде так:

$$[\vec{B}\vec{C}]_i = \varepsilon_{ijk} \cdot B_j \cdot C_k.$$

Пусть в последнем соотношении  $i = 1$ , тогда:

$$\begin{aligned} [\vec{B}\vec{C}]_1 &= \varepsilon_{1jk} B_j C_k = \varepsilon_{11k} B_1 C_k + \varepsilon_{12k} B_2 C_k + \varepsilon_{13k} B_3 C_k = \\ &= \varepsilon_{123} B_2 C_3 + \varepsilon_{132} B_3 C_2 = B_2 C_3 - B_3 C_2, \end{aligned}$$

что совпадает с первой компонентой исходного векторного произведения. Аналогичное доказательство можно провести и для других значений индекса. Псевдотензором Леви-Чивиты можно пользоваться для представления такого вида выражений.

С учетом формулы (1.22) теорема Остроградского (1.21) в тензорном представлении получает следующую форму:

$$\oint_A \varepsilon_{ijk} \cdot B_k \cdot n_j \cdot dA = \int_V \varepsilon_{ijk} \cdot B_{k,j} \cdot dV. \quad (1.23)$$

Формулу (1.23) можно использовать для преобразования интегральных выражений.

### **Интегральные условия равновесия**

Интегральное уравнение равновесия **для сил** (рис. 1.5) имеет вид:

$$\int_V \vec{f}^M dV + \int_A \vec{\sigma}^n dA = 0, \quad (1.24)$$

где  $\vec{f}^M$  – массовая сила;  $dV$  – объем кубика;  $\vec{\sigma}^n$  – вектор напряжений;  $dA$  – элемент поверхности.

Уравнение (1.24) следует из более общего условия механики для сил:

$$\vec{F}^R = \int_V \vec{f}^M dV + \int_A \vec{\sigma}^n dA, \quad F_i^R = \int_V f_i^M dV + \int_A \sigma_i^n dA. \quad (1.25)$$

$\vec{F}^R = 0$  (условие равновесия)  $\Rightarrow F_i^R = 0$ . Здесь  $\vec{F}^R$  – результирующая сила.

Рассмотрим связь интегрального и дифференциального условий равновесия. Для этого, с учетом (1.13) и (1.25),  $F_i^R$  представим в следующем виде:

$$F_i^R = \int_V f_i^M dV + \int_A \sigma_i^n dA = \left\langle \begin{array}{l} \text{преобразуем} \\ \text{второй} \\ \text{интеграл} \end{array} \right\rangle = \int_V f_i^M dV + \int_A \sigma_{ji} n_j dA =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} \text{применим теорему} \\ \text{Гаусса ко 2-му} \\ \text{интегралу} \end{array} \right\rangle = \int_V f_i^M dV + \int_V \sigma_{ji,j} dV = \int_V (f_i^M + \sigma_{ji,j}) dV = 0. \quad (1.26)$$

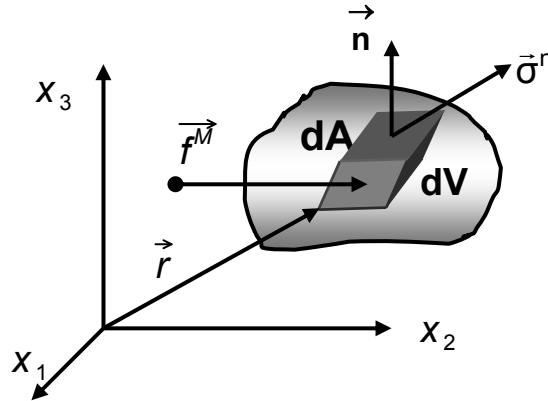


Рис. 1.5. Действие сил на элементарный объем

Ввиду произвольности объема, по которому производится интегрирование, из (1.26) получаем условие равновесия для сил в дифференциальной форме, совпадающее с формулой (1.15), полученной ранее другим путем:  $f_i^M + \sigma_{ji,j} = 0$ .

Интегральное условие равновесия **для моментов** (см. рис. 1.5) можно записать в привязке к началу системы координат в виде:

$$\vec{M}^R = \int_V [\vec{r} \vec{f}^M] \cdot dV + \int_A [\vec{r} \vec{\sigma}^n] \cdot dA = 0, \quad (1.27)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, указанный на рис. 1.5.

Компоненту  $i$  момента (1.27) с учетом формул (1.13), (1.22) и (1.23) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} M_i^R &= \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \int_A \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_k^n dA = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \\ &+ \int_A \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dA = \left\langle \begin{array}{l} \text{теорема} \\ \text{Остроградского} \end{array} \right\rangle = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j f_k^M dV + \\ &+ \int_V \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{lk})_l dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \{ x_j (f_k^M + \sigma_{lk,l}) + \sigma_{jk} \} dV = 0. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности объема интегрирования получаем **закон парности касательных напряжений**:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (1.28)$$

Формула (1.28) эквивалентна соотношению (1.17); в ней индекс  $i$  обозначает направление координатной оси. Очевидно, взяв  $i = 1$  и воспользовавшись определением тензора Леви-Чивиты, получим выведенную ранее зависимость (1.16).

### 1.3. Главные напряжения

В ряде случаев форма уравнений МДТТ существенно упрощается при переходе к главным напряжениям.

#### **Получение разрешающих уравнений**

Получим разрешающие уравнения для определения главных напряжений путем поворота координатных осей, а следовательно, и направляющего вектора (рис. 1.6) так, чтобы касательные напряжения на площадке сделались равными нулю. Вектор напряжений  $\vec{\sigma}^n$  будет совпадать по направлению с направляющим вектором площадки и тогда можно написать:

$$\vec{\sigma}^n = \sigma \cdot \vec{n}, \quad (1.29)$$

где  $\sigma$  – некоторый коэффициент.

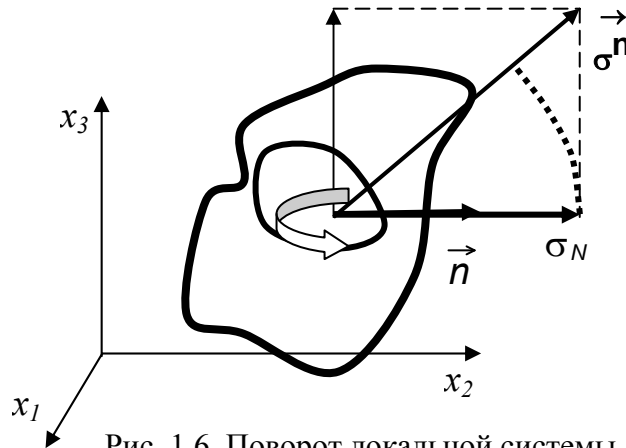


Рис. 1.6. Поворот локальной системы координат

В покомпонентном представлении формула (1.29) дает:

$$\sigma_i^n - \sigma \cdot n_i = 0, \quad \sigma_{ij} \cdot n_j - \delta_{ij} \sigma \cdot n_j = 0, \quad (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma) \cdot n_j = 0. \quad (1.30)$$

При преобразованиях в формулах (1.30) были использованы соотношения (1.13) и (1.10).

Теперь задача состоит в решении системы (1.30) с целью определения первоначально собственных значений  $\sigma$  (главных напряжений), а затем для каждого из собственных значений, решая систему (1.30) с дополнительным условием:  $|\vec{n}|^2=1$ , можно найти три новых направляющих вектора, определяющих новое положение трех осей системы координат после поворота.

Из рис. 1.6 видно, что проекция вектора напряжений на направляющий вектор  $\sigma_N$ , представляет собой скалярное произведение вектора напряжений и направляющего вектора ввиду единичности модуля последнего:  $\vec{\sigma}^n \cdot \vec{n} = \sigma_N$ . Отсюда легко получить соотношение:

$$\sigma_N = \sigma_i^n n_i = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (1.31)$$

Результат (1.30) может быть получен более изящно **методом неопределенных множителей Лагранжа**, заключающемся в переходе от задачи на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. Задача состоит в определении положения системы координат после ее поворота с

целью достижения максимума проекции вектора напряжений  $\sigma_N$  при дополнительном условии  $|\vec{n}|^2=1$ . Построим новую функцию  $F(n_i) = \sigma_N + \sigma \cdot (1 - |\vec{n}|^2)$ , где  $\sigma$  – неопределенный множитель Лагранжа. Используя (1.31), после небольших преобразований получим:

$$F(n_i) = \sigma_{ij} n_i n_j - \sigma(n_i^2 - 1).$$

Найдем производные:  $\frac{\partial F(n_i)}{\partial n_k} = 0, \frac{\partial F(n_i)}{\partial \sigma} = 0$ .

$$\sigma_{ij} \cdot \left( \frac{\partial n_i}{\partial n_k} \right) \cdot n_j + n_i \cdot \sigma_{ij} \cdot \left( \frac{\partial n_j}{\partial n_k} \right) - \sigma \cdot 2 \cdot n_i \cdot \left( \frac{\partial n_i}{\partial n_k} \right) = \sigma_{ij} \cdot (\delta_{ik} n_j + n_i \delta_{jk}) - 2 \cdot \sigma \cdot n_i \cdot \delta_{ik};$$

$$\sigma_{kj} n_j + \sigma_{ik} n_i - 2\sigma n_i \delta_{ik} = |j \rightarrow i| = \sigma_{ki} n_i + \sigma_{ik} n_i - 2\sigma n_i \delta_{ik} = 2\sigma_{ik} n_i - 2\sigma \delta_{ik} n_i = 2(\sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}) n_i = 0; \quad n_i^2 = 1.$$

Отсюда снова имеем ту же систему уравнений, что и (1.30):  $(\sigma_{ki} - \sigma \delta_{ik}) \cdot n_i = 0$ .

### Главные напряжения

Систему (1.30) можно представить в виде:

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \\ (\sigma_{11} - \sigma) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \\ \sigma_{21} n_1 + (\sigma_{22} - \sigma) n_2 + \sigma_{23} n_3 = 0 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + (\sigma_{33} - \sigma) n_3 = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Нетривиальное решение системы (1.32) с дополнительным условием  $n_i^2 = 1$  можно обеспечить, если выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (1.33)$$

Раскрывая определитель, из (1.33) получим уравнение Гамильтона-Кэлли:

$$\sigma^3 - l_1 \cdot \sigma^2 + l_2 \cdot \sigma - l_3 = 0, \quad (1.34)$$

где  $l_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$ ,

$$l_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix},$$

$$l_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (1.34) может быть сведено к приведенному кубическому уравнению с помощью подстановки:

$$\sigma = X + \frac{l_1}{3}. \quad (1.35)$$

$$X^3 + 3 \cdot P \cdot X + 2 \cdot Q = 0, \quad (1.36)$$

где  $P = \frac{1}{3} \cdot \left( l_2 - \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \right)$ ;  $Q = -\frac{1}{27} \cdot l_1^3 + \frac{1}{6} l_1 \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot l_3$ .

Решение приведенного уравнения (1.36) существует при  $P^3 + Q^2 < 0$ . Для него решение Кардано представляется в тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \phi, \quad X_2 = 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \left( \phi + \frac{2}{3} \pi \right), \\ X_3 &= 2 \cdot \sqrt{|P|} \cdot \cos \left( \phi - \frac{2}{3} \pi \right), \quad \text{где } \phi = \frac{1}{3} \cdot \arccos \left( -\phi \cdot |P|^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Найденные решения (1.37) следует подставить в (1.35) для определения главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Проверку правильности определения главных напряжений можно установить по значениям коэффициентов  $I_1, I_2, I_3$  в уравнении Гамильтона-Кэлли, которые называются **инвариантами** (т.е. величинами, не изменяющими своих значений при повороте системы координат). В терминах главных напряжений они имеют вид:

$$l_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad l_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1; \quad l_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (1.38)$$

**Анализ инвариантов** (1.38): 1) Если только одно из напряжений равно нулю, то  $I_3 = 0 \Rightarrow$  двухосное напряженное состояние; 2) Если два напряжения равны нулю, то имеем одноосное напряженное состояние.

Для определения направляющих векторов следует решить систему (1.32) для каждого из найденных главных напряжений с дополнительным условием  $n_i^2 = 1$ . Неизвестные направляющие косинусы следует снабжать верхним индексом, одноименным с напряжением:  $\sigma_2 \Leftrightarrow n_i^2$  во избежание путаницы.

Отметим, что при подстановке главного напряжения в систему (1.32) получаем только два независимых уравнения, поэтому дополнительное условие для направляющих косинусов необходимо. В результате получим три направляющих вектора:

$$\vec{n}^1 (n_1^1, n_2^1, n_3^1); \quad \vec{n}^2 (n_1^2, n_2^2, n_3^2); \quad \vec{n}^3 (n_1^3, n_2^3, n_3^3). \quad (1.39)$$

Независимых компонент в (1.39) будет только шесть.

При переходе к главным напряжениям тензор напряжений преобразуется:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (1.40)$$

### **Разложение тензора напряжений**

Тензор напряжений можно представить в виде двух тензоров: девиатора и шарового тензора:  $T_\sigma = D_\sigma + T_S$ .

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_{cp} \end{vmatrix}; \quad T_S = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix}. \quad (1.41)$$

Здесь  $\sigma_{cp}$  – среднее гидростатическое давление. Роль каждого из тензоров (1.41) неодинакова в пластической деформации: за изменение формы (точнее, наступление пластичности) ответственен лишь девиатор.

#### 1.4. Преобразование компонент тензора напряжений и интерпретация вида напряженного состояния

##### *Преобразование компонент тензора напряжений при повороте системы координат*

При решении задач формообразования иногда с целью упрощения исходной системы уравнений целесообразен переход от одной системы координат к другой, осуществляемый чаще всего поворотом системы координат относительно ее центра. Пусть тензор напряжений известен в старой системе координат и привязан к ее центру. Оси новой системы координат обозначим надстрочным индексом «прим» (рис. 1.7).

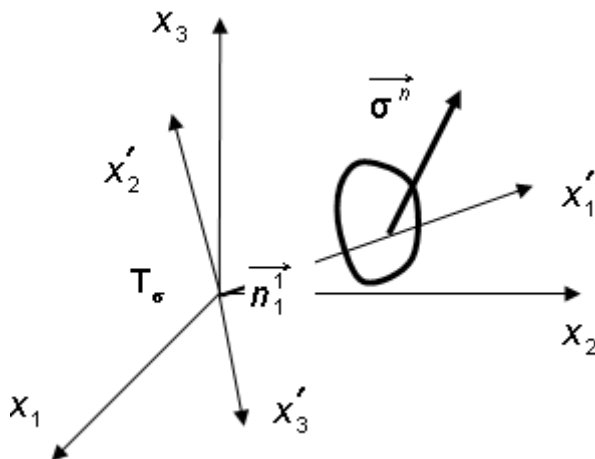


Рис. 1.7. Поворот системы координат

Предположим, что поворот системы координат вполне определен, т.е. известны направляющие косинусы единичного вектора, совпадающего с направлением новой оси:

$$\vec{n}^1(n_1^1, n_2^1, n_3^1): \text{ось } x'_1; \quad \vec{n}^2(n_1^2, n_2^2, n_3^2): \text{ось } x'_2; \quad \vec{n}^3(n_1^3, n_2^3, n_3^3): \text{ось } x'_3. \quad (1.42)$$

На площадке, ориентированной перпендикулярно, например, оси  $x'_1$  действует вектор напряжений с компонентами:

$$\sigma_i^{n^1} = \{\sigma_{ij} n_j^1\}. \quad (1.43)$$

Составляющие  $\sigma_i^{n^1}$  в (1.43) являются проекциями соответствующего вектора напряжений на старые оси координат. Аналогично такие же проекции можно получить, рассматривая площадки, нормальные и к другим новым осям. В общем случае:

$$\sigma_i^{n^k} = \{\sigma_{ij} n_j^k\}. \quad (1.44)$$

Чтобы определить компоненту тензора напряжений в новой системе координат, например  $\sigma'_{kl}$ , необходимо просуммировать произведения проекций



вектора напряжений, найденных в старой системе координат, и соответствующих направляющих косинусов:

$$\sigma'_{kl} = \sigma_i^{n^k} \cdot n_i^l = \sigma_{ij} \cdot n_j^k \cdot n_i^l.$$

Напомним, что индекс  $k$  обозначает направление новой оси координат, а индекс  $l$  – направление действия силы в **новой** системе координат. Окончательно:

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{ij} \cdot n_j^k \cdot n_i^l. \quad (1.45)$$

Формула (1.45) есть **закон преобразования компонент** при повороте системы координат в соответствии с (1.42).

### **Поверхность Коши, эллипсоид Ламэ**

Напряженное состояние можно представить графически, исходя из следующих рассуждений. Пусть имеется некое тело (рис. 1.8).

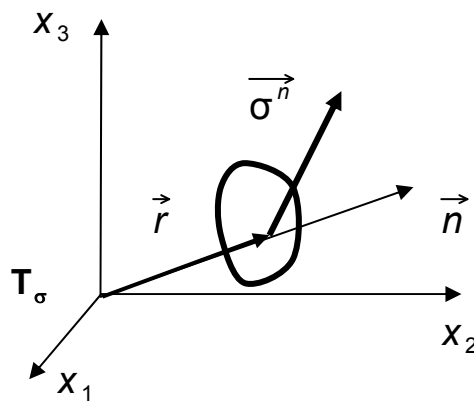


Рис. 1.8. К установлению поверхности Коши

В нем выделена площадка с вектором  $\vec{n}$  и компонентами  $(n_1, n_2, n_3)$ . Очевидно, систему координат по отношению к данному телу, можно всегда расположить таким образом, чтобы начало ее было на продолжении направляющего вектора. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$|r| = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_N|}} = r, \quad (1.46)$$

где  $k$  – калибрующий коэффициент;  $r$  – модуль радиуса-вектора. Возведем в квадрат обе части уравнения (1.46) и после небольших преобразований и освобождения от модуля, получим:

$$\pm k^2 = \sigma_N \cdot r^2.$$

Производя подстановку в соответствии с (1.44) и замену  $r$  через координаты, из последнего уравнения получаем:

$$\pm k^2 = \sigma_{ij} \underbrace{n_i}_{x_i} \cdot r \cdot \underbrace{n_j}_{x_j} \cdot r,$$

или с учетом замены:

$$\sigma_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = \pm k^2. \quad (1.47)$$

Уравнение (1.47), в котором в качестве коэффициентов квадратичной формы стоят компоненты тензора напряжений, называется **уравнением поверхности Коши**. Данное уравнение поворотом системы координат может быть преобразовано так, чтобы коэффициенты при смешанных членах были равны нулю, что позволяет представить поверхность в терминах главных напряжений:

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = \pm k'^2, \quad (1.48)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – являются главными напряжениями.

Возможна несколько иная интерпретация. Если в формуле (1.44) перейти к главным напряжениям, то получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_1^n &= \sigma_1 \cdot n_1 & n_1 &= \frac{\sigma_1^n}{\sigma_1} \\ \sigma_2^n &= \sigma_2 \cdot n_2, \text{ откуда} & n_2 &= \frac{\sigma_2^n}{\sigma_2} \\ \sigma_3^n &= \sigma_3 \cdot n_3 & n_3 &= \frac{\sigma_3^n}{\sigma_3} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Подставляя выражения направляющих косинусов из (1.49) в соотношение  $\sigma_i \cdot n_i = 1$ , получим так называемый **эллипсоид напряжений Ламэ**:

$$\left(\frac{\sigma_1^n}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^n}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3^n}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \quad (1.50)$$

Представленные виды интерпретации напряженного состояния показывают, что поверхности, которые образуются вследствие внешних нагрузок, являются **выпуклыми**.

Анализ (1.50) дает следующие результаты.

1. Все напряжения равны между собой. Тогда имеем всестороннее сжатие или растяжение (уравнение (1.50) есть уравнение шара): тензор напряжений принимает вид второй формулы (1.41), т.е. переходит в шаровой тензор, инвариантный к выбору системы координат.

2. Одно из главных напряжений равно нулю. Это означает, что осуществляется переход к плоскому напряженному состоянию (эллипс).

3. Два главных напряжения равны нулю. Здесь происходит переход к линейному напряженному состоянию (растяжение-сжатие).

### **Октаэдрические напряжения**

Определим напряжения в площадках, одинаково наклоненных к главным осям ( $n_i^2 = 1 \Rightarrow \{n_1 = n_2 = n_3 = n\} \Rightarrow n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ). Эти площадки образуют октаэдр, поэтому соответствующие напряжения называются октаэдрическими (рис 1.9).

На основании (1.44) нормальное октаэдрическое напряжение имеет вид:

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot \frac{1}{3} = \sigma_{cp}. \quad (1.51)$$

Касательные октаэдрические напряжения определяются из (1.2) с учетом (1.32) для главных напряжений:

$$\tau_0 = \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.52)$$

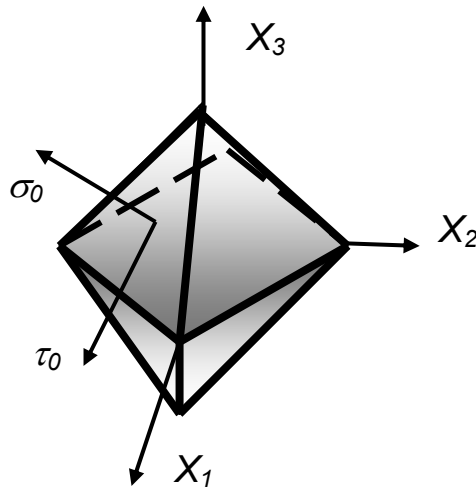


Рис. 1.9. Октаэдрические напряжения

Октаэдрическое касательное напряжение близко по величине к наибольшему касательному напряжению  $\tau_{max}$  для той же точки и находится в пределах:  $0,941 < \frac{\tau_0}{\tau_{max}} < 0,816$ , так что до известной степени оно может характеризовать уровень напряжений в точке. Напряжение (1.52) иногда называют «интенсивностью касательных напряжений», которую не следует путать с «интенсивностью напряжений», которая является обобщенным напряжением в точке.

### 1.5. Понятие интенсивности напряжений

В качестве обобщенной характеристики напряженного состояния в точке Генке (Хенке) ввел величину  $\sigma_i$ , пропорциональную квадратному корню из второго инварианта девиатора тензора напряжений:

$$\sigma_i = k \sqrt{I_2(D_\sigma)}, \quad (1.53)$$

где  $k$  – коэффициент, подлежащий определению.

В формуле (1.53) второй инвариант девиатора тензора напряжений определяется на основе (1.34) и (1.41) следующим образом:

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{cp} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} - \sigma_{cp} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} - \sigma_{cp} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{cp} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6} \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Комбинируя (1.53) и (1.54), а также переходя к линейному напряженному состоянию, например,  $\sigma_i = \sigma_1$ , получим значение коэффициента  $k = \sqrt{3}$ .

Тогда формула (1.53) примет следующий вид:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}. \quad (1.55)$$

Формула (1.55) представляет собой выражение **интенсивности напряжений**, характеризующей обобщенное (эквивалентное) напряжение в точке деформируемого тела. Интенсивность напряжений используется при характеристике материала с помощью «единой кривой», при формулировке условия пластичности, а также при решении задач формообразования и предельного формоизменения.

## 1.6. Круговая диаграмма напряжений Мора

Круговая диаграмма напряжений Мора позволяет наглядно представить вид напряженного состояния и геометрически решать некоторые вспомогательные задачи.

Постановка задачи: Исходя из заданного вектора напряжений (тензора напряжений и направляющего вектора (рис. 1.10)) определить вид напряженного состояния и соответствующие ему направляющие косинусы, для случая перехода к главным напряжениям.

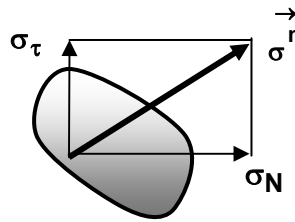


Рис. 1.10. Разложение вектора напряжений

$$(\vec{\sigma}^n)^2 = \sigma_N^2 + \sigma_\tau^2; \quad \sigma_i^n = \sigma_{ij} \cdot n_j; \quad \sigma_N = \sigma_{ij} \cdot n_i \cdot n_j.$$

Квадрат модуля вектора напряжений определяется как скалярное произведение:

$$(\vec{\sigma}^n)^2 = \sigma_i^n \sigma_i^n = (\sigma_i^n)^2. \quad (1.56)$$

При переходе к главным напряжениям  $\sigma_N$  и (1.56) принимают вид:

$$\sigma_N = \sigma_{1j} n_1 n_j + \sigma_{2j} n_2 n_j + \sigma_{3j} n_3 n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad (1.57)$$

$$\left( \vec{\sigma}^n \right)^2 = (\sigma_1^n)^2 + (\sigma_2^n)^2 + (\sigma_3^n)^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2. \quad (1.58)$$

Представим два из вышеприведенных уравнений с добавлением к ним условия единичности направляющего вектора, умножим их чисто формально на  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно, и сложим, производя группировку:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 & | \cdot a \\ \sigma_N^2 + \sigma_\tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 & | \cdot b \\ 1 &= n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 & | \cdot c \end{aligned}$$

$$b \cdot \sigma_\tau^2 + b \cdot \sigma_N^2 + a \cdot \sigma_N + c = n_1^2 (b \sigma_1^2 + a \sigma_1 + c) + n_2^2 (b \sigma_2^2 + a \sigma_2 + c) + n_3^2 (b \sigma_3^2 + a \sigma_3 + c).$$

Последнее уравнение можно сделать более компактным за счет введения функции:  $f(z) = b \cdot z^2 + a \cdot z + c$ .

$$b \cdot \sigma_\tau^2 + b \cdot \sigma_N^2 + a \cdot \sigma_N + c = n_1^2 \cdot f(\sigma_1) + n_2^2 \cdot f(\sigma_2) + n_3^2 \cdot f(\sigma_3). \quad (1.59)$$

Определим из уравнения (1.59)  $n_1^2$ . Для этого в скобках при  $n_2^2$  и  $n_3^2$  нужно выбрать коэффициенты  $a, b, c$  таким образом, чтобы эти скобки обратились в нуль, т.е.  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  должны быть корнями уравнения  $f(z) = 0$ . Квадратный трехчлен допускает разложение:

$$bz^2 + a \cdot z + c = (z - \sigma_2)(z - \sigma_3). \quad (1.60)$$

Раскроем правую часть последнего уравнения:

$$bz^2 + a \cdot z + c = z^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)z + \sigma_2\sigma_3,$$

откуда следует:  $b = 1$ ;  $a = -(\sigma_2 + \sigma_3)$ ;  $c = \sigma_2\sigma_3$ .

Перепишем уравнение (1.59) с учетом (1.60):

$$n_1^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + f(\sigma_N)}{f(\sigma_1)} = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (1.61)$$

Остальные выражения для  $n_2$  и  $n_3$  получаются путем циклической перестановки индексов:

$$n_2^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \quad (1.62)$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_\tau^2 + (\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (1.63)$$

Введем легко проверяемое тождество:

$$(\sigma_N - \sigma_i)(\sigma_N - \sigma_j) = \left( \sigma_N - \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_i - \sigma_j}{2} \right)^2,$$

с учетом которого уравнение (1.61) имеет вид:

$$\sigma_\tau^2 + \left( \sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \overbrace{\left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2}^{R_{10}^2} + \overbrace{n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}^{\Delta_1},$$

$$R_1^2 = R_{10}^2 + \Delta_1; \Delta_1 > 0. \quad (1.64)$$

$$\sigma_\tau^2 + \left( \sigma_N - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 + n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) = R_2^2,$$

$$R_2^2 = R_{20}^2 - \Delta_2; \Delta_2 > 0. \quad (1.65)$$

$$\sigma_\tau^2 + \left( \sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) = R_3^2,$$

$$R_3^2 = R_{30}^2 + \Delta_3; \Delta_3 > 0. \quad (1.66)$$

Уравнения (1.64) – (1.66) представляют собой уравнения окружностей, а знаки  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  соответствуют выполнению условия

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (1.67)$$

Построим соответствующие (полу) окружности (1.64) – (1.66) с учетом знаков приращений  $\Delta_i$  (рис. 1.11).

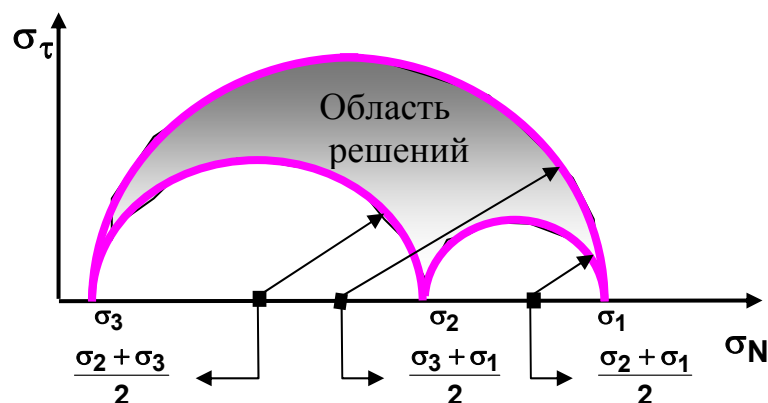


Рис. 1.11. Круги (диаграмма) Мора

Понятие о схемах напряженного состояния в ОМД введено С.И. Губкиным. Хотя компоненты тензора напряжений зависят от координат, в ряде случаев можно принять, что схема главных напряжений одинакова для большинства точек тела и характеризует напряженное состояние деформируемого тела. Схема изображается кубиком с указанием стрелками наличия и направления главных напряжений (рис. 1.12).

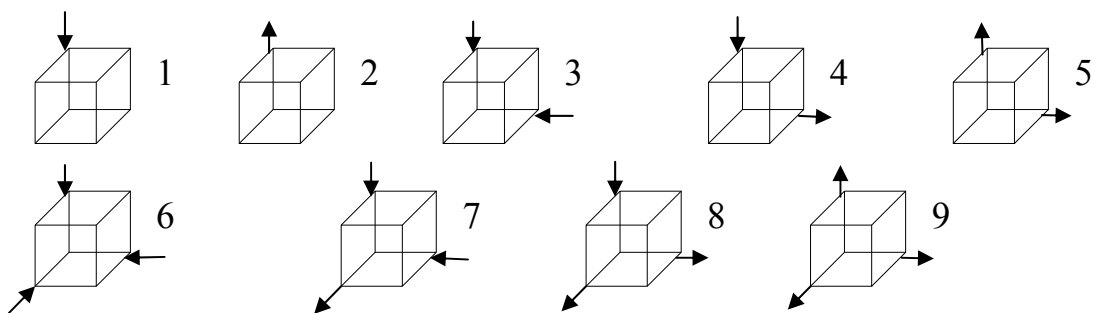


Рис. 1.12. Схемы главных напряжений: 1, 2 – линейная схема; 3, 4, 5 – плоская схема; 6, 7, 8, 9 – объемная схема

Подобно тензору напряжений, схемы главных напряжений можно разложить на две – схему шарового тензора и схему девиатора. Имеется две схемы шарового тензора. У девиатора – две объемных схемы и одна плоская. Если на схеме присутствуют напряжения одного знака, то они называются одноименными. В противном случае – разноименными.

### 1.7. Плоская задача теории пластичности

В ТОМД имеется ряд задач, где все напряжения могут не зависеть от одной из координат. Такими задачами являются, например, задача об осадке длинной полосы, задача о раздаче цилиндрической заготовки или вытяжке деталей (фланец заготовки). Исходные посылки для **плоской задачи** (рис. 1.13):

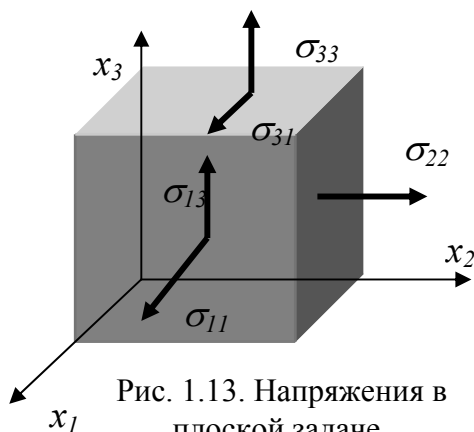


Рис. 1.13. Напряжения в плоской задаче

1. Напряжения не зависят от одной из координат, например, от  $x_2$ :

$$\sigma_{ij} \neq f_{ij}(x_2). \quad (1.68)$$

2. Касательные напряжения, содержащие индекс 2, равны нулю.

$$\sigma_{2j} = \sigma_{j2} = 0, \quad j \neq 2. \quad (1.69)$$

3. а) плоское напряженное состояние

$$\sigma_{22} = 0, \quad \varepsilon_{22} \neq 0. \quad (1.70)$$

б) плоское деформированное состояние

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}, \quad \varepsilon_{22} = 0. \quad (1.71)$$

Вектор напряжений на произвольной площадке имеет компоненты:  $\sigma_N$  и  $\sigma_\tau$ , подлежащие определению, если задан тензор напряжений и направляющий вектор в системе координат  $x_1$  и  $x_3$  (рис. 1.14).

Т.к. рассматриваем плоский случай, то  $n_2 = 0$ . Из соотношения:  $n_i^2 = 1 \Rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ . Ввиду рассмотрения плоского случая:

$$n_1^2 + n_3^2 = 1. \quad (1.72)$$

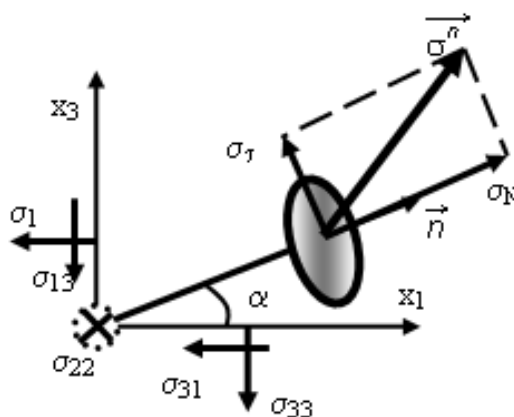


Рис. 1.14. Расположение компонент напряжений в плоской задаче

Из рис. 1.14 видно, что  $n_1 = \cos \alpha$ , а с учетом (1.72)  $n_3 = \sin \alpha$ .

Очевидно, справедливы следующие соотношения, полученные ранее:

$$(\bar{\sigma}^n)^2 = (\sigma_1^n)^2 + (\sigma_2^n)^2 + (\sigma_3^n)^2; \quad \sigma_\tau^2 = (\bar{\sigma}^n)^2 - \sigma_N^2. \quad (1.73)$$

Для нахождения  $\sigma_\tau$  найдем предварительно  $\sigma_i^n = \sigma_{ij}n_j$  и, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1^n &= \sigma_{ij}n_j = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{13}n_3; & \sigma_3^n &= \sigma_{3j}n_j = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3; \\ (\bar{\sigma}^n)^2 &= (\sigma_{11}n_1 - \sigma_{13}n_3)^2 + (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{33}n_3)^2 = \left\langle \begin{array}{l} \text{переход к} \\ \text{главным} \\ \text{напряж.} \end{array} \right\rangle = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ \sigma_N &= \sigma_{1j}n_j n_j + \sigma_{3j}n_j n_j = \sigma_{11}n_1^2 + 2 \cdot \sigma_{13}n_1 n_3 + \sigma_{33}n_3^2 = \left\langle \begin{array}{l} \text{переход к} \\ \text{главным} \\ \text{напряж.} \end{array} \right\rangle = \\ &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \cos 2\alpha. \\ \sigma_\tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_1^2 n_1^4 - \sigma_3^2 n_3^4 - 2\sigma_1 \sigma_3 n_1^2 n_3^2 = \\ &= \sigma_1^2 n_1^2 (1 - n_1^2) + \sigma_3^2 n_3^2 (1 - n_3^2) - 2\sigma_1 \sigma_3 n_1^2 n_3^2 = n_1^2 n_3^2 (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \\ &= 4n_1^2 n_3^2 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 = \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha \right]^2, \\ \sigma_\tau &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Касательные напряжения принимают предельные значения при  $\sin 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$ .

**Главные напряжения.** Тензор напряжений для плоского напряженного состояния трансформируется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = T_\sigma. \quad (1.75)$$

Для определения главных напряжений с учетом (1.75) нужно составить уравнение:  $\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$ , откуда следует алгебраическое уравнение:

$$\sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \cdot \sigma + \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} - \sigma_{13}^2 = 0. \quad (1.76)$$

Решение (1.76) дает следующие значения главных напряжений:

$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_3) &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} \right)^2 + \sigma_{13}^2 - \sigma_{11} \sigma_{33}}; \\ (\sigma_1, \sigma_3) &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Пусть заданы главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в осях 1 и 2 (рис. 1.15). Найдем компоненты напряжений в осях, повернутых на некий угол  $\alpha$  по отношению к направлению 1. Подход к вычислению напряжений следующий:

1. На оси  $X_1$  выбираем точку и направляющий вектор, совпадающий с данной осью.
2. Определяем компоненту  $\sigma_N$  на данном направлении.
3. Идентифицируем  $\sigma_N$  с напряжением  $\sigma_{11}$ .



4. Поворотом оси  $X_1$  на  $90^\circ$  осуществляем переход от  $\sigma_{11}$  к  $\sigma_{33}$ .
5. Касательные напряжения  $\sigma_{13}$  отождествляем с  $\sigma_\tau$ .

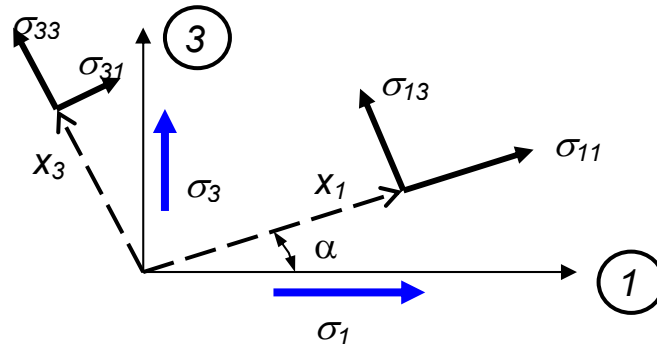


Рис. 1.15. Переход к произвольной системе координат  $x_1-x_3$

**Заданы:**  $\sigma_1, \sigma_3$  и их направления. Требуется определить  $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$  в осях, повернутых на угол  $\alpha$  по отношению к заданным.

1. Располагаем новые оси, как показано на рис. 1.15.

$$2. \quad \sigma_N = \sigma_{ij}n_i n_j = \sigma_{1j}n_1 n_j + \sigma_{3j}n_3 n_j = \sigma_{11}n_1 n_1 + \sigma_{13}n_1 n_3 + \sigma_{31}n_3 n_1 + \sigma_{33}n_3 n_3 = \\ = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2; \{ \sigma_{i2} = 0 \}.$$

$$3. \quad \sigma_{11} = \sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

Направляющие косинусы:  $n_1 = \cos \alpha$ ;  $n_3 = \sin \alpha$ .

$$\sigma_{11} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \left( \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) + \sigma_3 \left( \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right).$$

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha.$$

$$4. \quad \sigma_{33} = \sigma_{11} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha.$$

$$5. \quad \sigma_{13} = \sigma_\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

Следовательно, при переходе  $\sigma_1, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13} \Rightarrow$  получаем:

$$\sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha.$$

(1.78)

## 1.8. Движение сплошной среды. Деформации

Формоизменение с точки зрения деформаций можно рассматривать как два состояния: начальное и конечное, не интересуясь промежуточным состоянием. Это **теория конечных деформаций**. Если же интересоваться в математическом и физическом описании формоизменения непрерывным

изменением среды в зависимости от времени (или какого-либо другого параметра нагружения), – это **теория пластического течения**. Существуют два подхода к изучению движения сплошной среды: **подход Лагранжа и Эйлера**.

На рис.1.16 дано тело с фиксированной точкой  $P_0$  в начальный момент времени  $t = 0$ . С течением времени тело деформируется, при этом в момент  $t = t_1$  точка  $P_0$  переходит в положение  $P$ , а начальная система координат с базисом  $\{\vec{e}_i\}$  переходит в систему с базисом  $\{\vec{e}'_i\}$ , начало которой определяется вектором  $\vec{b}$  по отношению к начальной системе координат. При этом новая система координат, будучи связанной с телом, испытывает поворот на некоторый угол. Вектор  $\vec{u}$  называется **вектором перемещений** и определяется так:

$$\vec{u} = \vec{b} + \vec{r}' - \vec{r}. \quad (1.79)$$

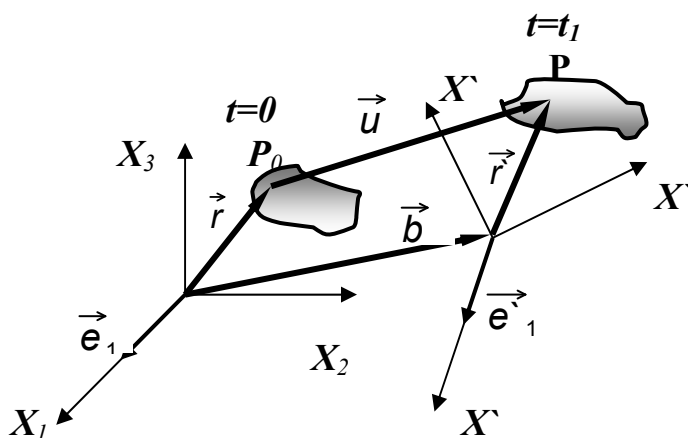


Рис. 1.16. Деформация тела

Если считать, что обе системы можно совместить (например, деформируемая заготовка в матрице), то  $\vec{b} \equiv 0$  и тогда уравнение (1.79) представимо в виде:

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (1.80)$$

где  $\vec{r}'$  – радиус-вектор точки  $P$  в системе с базисом  $\{\vec{e}'_i\}$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $P_0$ , связанный с системой, имеющей базис  $\{\vec{e}_i\}$ .

Движение частиц деформируемого тела можно описывать так:

$$\vec{r}' = \vec{r}' \cdot (\vec{r}, t), \text{ или } x'_i = x'_i \cdot (\vec{r}, t). \quad (1.81)$$

Уравнения (1.81) устанавливают соответствие между точками в начальной конфигурации в момент  $t = 0$  и их положением в текущем состоянии  $t = t_1$ . Предполагается, что это соответствие взаимно однозначно и непрерывно с непрерывными частными производными требуемого порядка. Это подход Лагранжа, а переменные  $x'_i$  называются переменными Лагранжа.

Движение частиц можно задать и в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}' \cdot (\vec{r}', t) \text{ или } x_i = x_i(\vec{r}', t). \quad (1.82)$$

Уравнения (1.82) выражают подход Эйлера, в котором можно идентифицировать начальные положения частиц, если известны их положения в момент времени  $t = t_1$ . Переменные  $x_i$  называются переменными Эйлера.

Из уравнения (1.80) следует, что  $u_i = x'_i - x_i$ , а из (1.81)  $x'_i = x'_i(x_i)$ , если рассмотрение отнести к фиксированному моменту времени (т.е. использовать теорию конечных деформаций). Тогда можно записать

$$u_i = u_i(x_k); \quad du_i = dx'_i - dx_i; \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_k. \quad (1.83)$$

Найдем расстояние между двумя точками, расположенными в теле до деформирования – на расстоянии  $dl$ , а после деформирования на расстоянии  $dl'$ .

Используя определение расстояния в декартовой системе координат, запишем соответствующие выражения:

$$dl = (dx_i \cdot dx_i)^{1/2}; \quad dl' = (dx'_i \cdot dx'_i)^{1/2}. \quad (1.84)$$

Раскроем второе выражение в (1.84) с учетом (1.83), возведя его предварительно в квадрат:

$$\begin{aligned} (dl')^2 &= dx'_i \cdot dx'_i = (dx_i + du_i) \cdot (dx_i + du_i) = dx_i \cdot dx_i + 2 \cdot du_i \cdot dx_i + du_i \cdot du_i + \\ &+ dl^2 + 2 \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot dx_k \cdot dx_i + du_i \cdot du_i = dl^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right\} \cdot dx_k \cdot dx_i. \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\text{Введем обозначение: } \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right\}. \quad (1.86)$$

Здесь  $\varepsilon_{ik}$  – компоненты **тензора деформаций  $T_\varepsilon$** , определяемого так:

$$T_\varepsilon = (\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.87)$$

С учетом обозначения (1.86) выражение (1.85) можно записать в виде:

$$(dl')^2 = dl^2 + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k. \quad (1.88)$$

Из определения (1.86) следует, что  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ , следовательно, тензор деформаций (1.87) **симметричен относительно главной диагонали**.

Если деформации считать малыми и пренебречь последним членом в определении (1.86), то получим компоненты **тензора малых деформаций Коши**:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}). \quad (1.89)$$

Тензор деформаций может быть приведен аналогично тензору напряжений к диагональному виду путем определения главных деформаций и соответствующих им площадок:

$$(\varepsilon_{ik} - \varepsilon \cdot \delta_{ik}) \cdot n_k = 0,$$

откуда находятся  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , т.е. главные деформации.

Как и в случае напряжений, первый инвариант определяется так:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (1.90)$$

а второй инвариант так:

$$I_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.91)$$

Тензор деформаций, аналогично тензору напряжений, можно разложить на шаровую и девиаторную составляющие:

$$T_\varepsilon = (T_\varepsilon - \varepsilon_{cp} \cdot E) + \varepsilon_{cp} \cdot E = D_\varepsilon + T_\varepsilon^0, \quad (1.92)$$

где  $D_\varepsilon$  – девиатор тензора деформаций;  $T_\varepsilon^0$  – шаровой тензор.

$$\text{Здесь } \varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{I_1 \cdot (\varepsilon)}{3}. \quad (1.93)$$

Дадим теперь интерпретацию главных деформаций, используя (1.91).

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot dx_k \cdot dx_i = dx_i \cdot dx_k \cdot \delta_{ik} + 2 \cdot \varepsilon_{ik} \cdot dx_i \cdot dx_k = (\delta_{ik} + 2 \cdot \varepsilon_{ik}) \cdot dx_i \cdot dx_k.$$

Если сделать переход к главным деформациям, то последнее соотношение переписывается следующим образом:

$$(dl')^2 = (1 + 2 \cdot \varepsilon_1) \cdot dx_1^2 + (1 + 2 \cdot \varepsilon_2) \cdot dx_2^2 + (1 + 2 \cdot \varepsilon_3) \cdot dx_3^2. \quad (1.94)$$

Положим, что деформация имеет место только вдоль одной из осей, например,  $x_1$ . Тогда, так как  $dx_2 = dx_3 = 0$ , из (1.94) следует:

$$dx_1' = \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \cdot dx_1. \quad (1.95)$$

Преобразуем (1.95) к виду

$$\frac{dx_1' - dx_1}{dx_1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1. \quad (1.96)$$

Но левая часть соотношения (1.96) представляет собой  $\varepsilon_1$  в силу определения деформации. При малой деформации  $\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \varepsilon_1)$ , т.е. правая и левая части в формуле (1.96) совпадают. Это означает, что введенные компоненты тензора, определяемого соотношением (1.96), представляют собой деформации. Если же осуществить переход к логарифмическим деформациям, то из (1.95) получим:

$$\ln \frac{dx_1'}{dx_1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + 2 \cdot \varepsilon_1). \quad (1.97)$$

Левая часть в (1.97) есть логарифмическая деформация  $e_1$  по определению, а если учесть малость  $\varepsilon_1$ , то

$$e_1 = \ln \frac{dx_1'}{dx_1} \approx \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$

то есть в этом случае обычная и логарифмическая деформации совпадают.

Как известно из опытов Бриджмена, при пластической деформации изменение объема деформируемого тела не происходит. Пусть объем тела до деформации  $dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$ , а после деформации  $-dV' = dx_1' \cdot dx_2' \cdot dx_3'$ . Подставляя в последнее выражение значения приращений координат по аналогии с (1.94), получим:

$$dV' = \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_3} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \approx (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) \cdot dV.$$

Преобразуем последнее соотношение к виду:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = (1 + \varepsilon_1) \cdot (1 + \varepsilon_2) \cdot (1 + \varepsilon_3) - 1.$$

После раскрытия скобок в правой части и удержания членов только первого порядка, будем иметь:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Если принять во внимание формулу (1.90), то можно записать с учетом несжимаемости и последнего соотношения:

$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{dV' - dV}{dV} = 0. \quad (1.98)$$

Формула (1.98) показывает, что первый инвариант деформаций можно интерпретировать как относительное изменение объема или как **условие несжимаемости (постоянства объема)**. Кроме того, из (1.93) и условия несжимаемости следует, что средняя деформация равна нулю, а поэтому шаровой тензор  $T_\varepsilon^0 = 0$  в соотношении (1.92).

Введем понятие интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i = k \cdot \sqrt{I_2(D_\varepsilon)}, \quad (1.99)$$

где коэффициент  $k$  подлежит определению.

На основании формулы (1.94) имеем:

$$I_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6} \cdot [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]$$

Переходя в последнем выражении к главным деформациям и подставляя его в (1.99), получим

$$\varepsilon_i = \frac{k}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (1.100)$$

Найдем значение коэффициента  $k$  из того условия, что интенсивность деформаций в случае одноосного растяжения должна совпадать с главной деформацией. Пусть  $\varepsilon_1$  – главная деформация. Тогда  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2}$ , если учесть условие несжимаемости. Из (1.100) следует

$$\varepsilon_i = \frac{k}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_1, \text{ откуда } k = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Подставив значение  $k$  в формулу (1.99) и учтя определение второго инварианта от тензора деформаций, получим:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)}. \quad (1.101)$$

Величина  $\varepsilon_i$  в формуле (1.101) представляет собой эквивалентную или осредненную деформацию в бесконечно малом объеме.

## 1.9. Условие совместности деформаций

Определение деформаций (1.86) включает и смешанные члены, которые вносят вклад в суммарную деформацию, если деформации большие. Малые

деформации, согласно (1.89), выражаются через три компоненты перемещений, а поэтому они не могут быть независимыми.

Продифференцируем дважды выражение (1.89) по  $k$  и  $l$  и запишем его четырежды, циклически изменяя индексы и производя суммирование:

$$\begin{aligned}
 & | \quad \varepsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}); \\
 - & | \quad \varepsilon_{li,jk} = \frac{1}{2}(u_{l,ijk} + u_{i,ljk}); \\
 + & | \quad \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2}(u_{k,lij} + u_{k,lji}); \\
 - & | \quad \varepsilon_{jk,il} = \frac{1}{2}(u_{j,kli} + u_{i,kjl}); \\
 & \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{li,jk} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jk,li} = 0 .
 \end{aligned} \tag{1.102}$$

Последнее уравнение в (1.102) представляет собой результат алгебраического суммирования предшествующих четырех уравнений, причем, правая часть оказалась равной нулю. Это уравнение впервые получено в 1860 г. Сен-Венаном и содержит 81 уравнение. С использованием псевдо-тензора Леви-Чивиты можно произвести его свертку:

$$\varepsilon_{mlj} \cdot (\varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{jk,il}) = 0 . \tag{1.103}$$

Повторное применение свертки приводит к следующему уравнению, полученному в разных формах Бусинеском в 1971 г., Бельтрами в 1889 г., Чезаро в 1906 г. Фактически, в векторном виде оно представляет собой следующее условие в терминах теории поля:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \text{ или } \text{rot rot } \vec{u} = 0 .$$

Повторное применение операции свертки к (1.103) дает:

$$\varepsilon_{mlj} \cdot \varepsilon_{nik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} = 0 . \tag{1.104}$$

Уравнение (1.104) является **уравнением или условием сплошности (неразрывности) в тензорном представлении**. Индексы  $m$  и  $n$  могут принимать значения 1, 2, 3, следовательно, из (1.104) можно получить девять уравнений, однако, только шесть из них будут независимыми.

Примем  $m = 1, n = 1$  и перейдем к обычному суммированию, используя правило Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1lj} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} &= \varepsilon_{11j} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,k1} + \varepsilon_{12j} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,k2} + \varepsilon_{13j} \cdot \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{ij,k3} = \\
 &= \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{i3,k2} - \varepsilon_{1ik} \cdot \varepsilon_{i2,k3} = \varepsilon_{12k} \cdot \varepsilon_{23,k2} + \varepsilon_{13k} \cdot \varepsilon_{33,k2} - \varepsilon_{12k} \cdot \varepsilon_{22,k3} - \varepsilon_{13k} \cdot \varepsilon_{32,k3} = \\
 &= 2 \cdot \varepsilon_{23,32} - \varepsilon_{33,22} - \varepsilon_{22,33} = 0 .
 \end{aligned}$$

В координатной форме данное уравнение (последняя строка) имеет вид:

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{dx_2 \cdot dx_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{dx_3^2} = 0 . \tag{1.105}$$

Еще два аналогичных уравнения могут быть получены с помощью изложенной выше процедуры при  $m = n = 2$  и  $m = n = 3$  из (1.104), однако, тот же самый результат получается из (1.105) циклической перестановкой индексов:

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{dx_3 \cdot dx_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{dx_1^2} = 0. \quad (1.106)$$

$$2 \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{dx_1 \cdot dx_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{dx_2^2} = 0. \quad (1.107)$$

Если взять разноименные индексы для  $m$  и  $n$ , например,  $m = 1, n = 2$ , то (1.104) можно развернуть следующим образом:

$$\varepsilon_{1lj} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,kl} = 0; \quad \varepsilon_{12j} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,k2} + \varepsilon_{13j} \cdot \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{ij,k3} = 0.$$

$$\varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{i3,k2} - \varepsilon_{2ik} \cdot \varepsilon_{i2,k3} = 0.$$

$$\varepsilon_{21k} \cdot \varepsilon_{13,k2} + \varepsilon_{23k} \cdot \varepsilon_{33,k2} - \varepsilon_{21k} \cdot \varepsilon_{12,k3} - \varepsilon_{23k} \cdot \varepsilon_{32,k3} = 0.$$

$$- \varepsilon_{13,32} + \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{32,13} = 0. \quad (1.108)$$

Запишем уравнение (1.108) в координатной форме:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{dx_1 \cdot dx_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{dx_2} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{dx_1} \right) = 0. \quad (1.109)$$

Уравнения неразрывности для других разноименных индексов можно получить из (1.109) циклической перестановкой индексов.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{dx_2 \cdot dx_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{dx_3} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{dx_2} \right) = 0. \quad (1.110)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{dx_3 \cdot dx_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{dx_1} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{dx_3} \right) = 0. \quad (1.111)$$

Таким образом, уравнение (1.104) дает **условие совместности деформаций в тензорной форме**, в то время как уравнения (1.105) – (1.107) и (1.109) – (1.111) дают **координатную форму** этого условия. Выполнение данного условия гарантирует отсутствие разрушений в заготовке при деформировании, поскольку нарушение его ведет к тому, что к такому телу существующая модель сплошной среды вообще неприменима. Отметим, что наличие только шести уравнений связи вместо девяти обусловлено симметричностью тензора деформаций относительно главной диагонали матрицы.

Пусть деформированию подвергается некоторый кубик с размером ребра  $x_{30}$ . Введем понятие **смещенного объема** в одном из направлений, например, в **направлении  $x_3$**  согласно рис. 1.17.

$$V_{e3} = \int_{x_{30}}^{x_{3f}} A(x_3) \cdot dx_3. \quad (1.112)$$

При пластическом деформировании объем постоянен, а площадь поперечного сечения определяется соотношением:  $A(x_3) = \frac{V}{x_3}$ . Тогда формула

(1.112) принимает вид:

$$V_{e3} = V \cdot \int_{x_{30}}^{x_{3f}} \frac{dx_3}{x_3} = V \cdot \ln\left(\frac{x_{3f}}{x_{30}}\right) = V \cdot e_3. \quad (1.113)$$

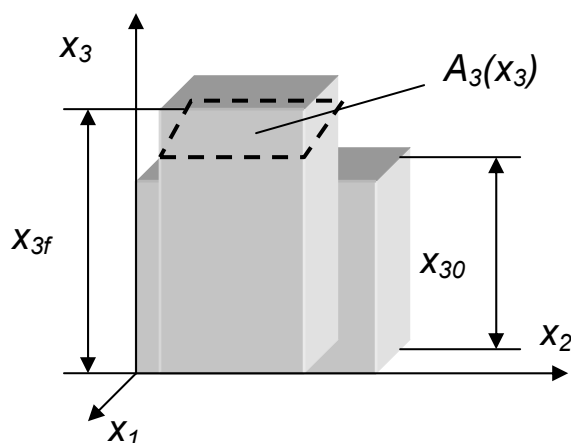


Рис. 1.17. К определению смещенного объема

Таким образом, смещенный объем в заданном направлении равен произведению объема на логарифмическую деформацию в данном направлении. Очевидно, **полный смещенный объем** равен нулю вследствие условия несжимаемости. Понятие смещенного объема полезно для оценки потребной работы деформирования. Произведение предела текучести на смещенный объем дает порядок этой работы для предварительного выбора оборудования.

Как видно из (1.112), компоненты малой деформации являются линейными функциями от производных перемещений по координатам. При рассмотрении бесконечно малой окрестности точки сами перемещения следует считать линейными функциями координат, а, следовательно, их производные, выражающие деформации, постоянными. **Однородная деформация** – деформация, при которой перемещения являются линейными функциями координат, а сама деформация постоянной. При однородной деформации выделенные объекты в теле преобразуются в подобные (плоскость – в плоскость, шар – в сферу и т.п.).

При неоднородной деформации деформационная картина усложняется, на некоторых участках деформация может быть **немонотонной** (меняется знак деформаций). Теория конечных деформаций и теория пластического течения дают практически одни и те же результаты при условии монотонной деформации, когда деформации малы. При немонотонной деформации в теории пластических течений рассматривают некий параметр нагружения, который связывается с накопленной деформацией (параметр Удквиста).

При деформировании расстояния между точками изменяются со временем, т.е.  $u_i = f(x_1, x_2, x_3, t)$ . Зависимость перемещений от времени позволяет ввести понятие скорости деформаций

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}). \quad (1.114)$$

Для скоростей деформаций выполняется условие несжимаемости (постоянство объема с течением времени); можно определить главные скорости деформации, дать их интерпретацию в терминах кругов Мора и т.д. аналогично деформациям. Скорости деформаций играют существенную роль в теории пластического течения.



## 1.10. Модели пластического формоизменения и условия пластичности

1. Модели сплошных сред весьма разнообразны: упругая, упруго пластическая, жестко пластическая, вязко пластическая и т.д.

В зависимости от допущений в теории пластичности различают следующие наиболее часто используемые модели (рис. 1.18):

1. Идеально пластичного тела («1»);
2. Идеально пластичного тела с линейным законом упрочнения («2»);
3. Идеально пластичного тела со степенным законом упрочнения («3»);
4. Жестко пластичного тела («4»);
5. Жестко пластичного тела с линейным законом упрочнения («5»);
6. Жестко пластичного тела со степенным законом упрочнения («6»).

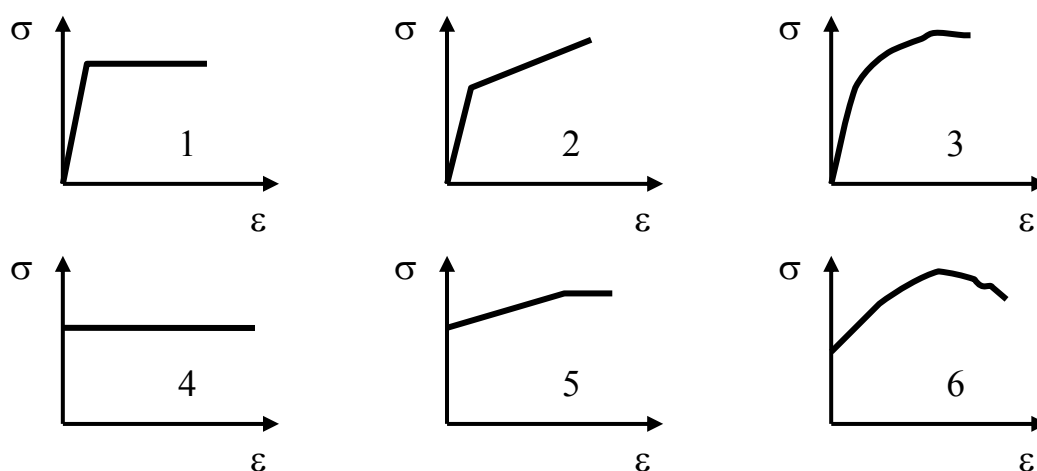


Рис. 1.18. Модели сплошных деформируемых сред

2. Условия пластичности формируются для начального этапа развития пластических деформаций, причем в чисто пластической задаче упругие составляющие не учитываются. Экспериментально установлено, что пластическое формоизменение имеет место, когда второй инвариант от девиатора напряжений достигает определенного значения, определяемого пределом текучести материала.

Независимо друг от друга Мизес, Губер и Генке для случая идеально пластического тела выдвинули гипотезу, согласно которой для достижения пластического состояния в точке, необходимо чтобы выполнялось условие:

$$\sigma_i = \sigma_s, \quad (1.115)$$

где  $\sigma_s$  – предел текучести материала.

Учет упрочнения осуществляется обычно в виде линейной или степенной зависимости, однако, это существенно затрудняет решение задач.

Экспериментально Бриджменом и Надаи была подтверждена справедливость условия пластичности Мизеса–Губера(-Генке) в следующем виде:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) = 2\sigma_s^2. \quad (1.116)$$

Условие (1.116) не единственно. Например, **условие пластичности Сен-Венана** гласит: пластичность наступает, когда разность между наибольшим и наименьшим напряжением достигает предела текучести. Экспериментально показано, что условие (1.116) является более точным.

3. Существует также энергетическое условие пластичности. Запишем полную работу пластического формоизменения:

$$A_n = A_0 + A_{\text{тм}}, \quad (1.117)$$

где  $A_0$  – работа, затраченная на всестороннее сжатие;

$A_{\text{тм}}$  – работа, затраченная на изменение формы.

Работа, приходящаяся на единичный объем, как известно из сопротивления материалов, определяется произведением тензоров напряжений и деформаций в терминах их собственных значений:

$$A_n = \frac{1}{2} T_\sigma \cdot T_\varepsilon; \quad A_0 = \frac{1}{2} \bar{T}_\sigma \cdot \bar{T}_\varepsilon. \quad (1.118)$$

Запишем тензоры в виде матриц, а также закон Гука, учитывая, что во всех соотношениях следует сделать переход к главным значениям напряжений и деформаций:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)];$$

$$\bar{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{pmatrix}; \quad \bar{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)];$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

Подставляя (1.118) в (1.117) и проводя преобразования с учетом последних соотношений и условия пластичности (1.116), получим:

$$A_{\text{тм}} = A_n - A_0 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2 \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3 \cdot \sigma_3) - A_0 =$$

$$= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_s^2 = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_s^2. \quad (1.119)$$

Формула (1.122) представляет собой формулировку **энергетического условия пластичности**: удельная работа формоизменения не зависит от пластического состояния, а зависит от констант материала.

4. Рассмотрим частные случаи условия пластичности (1.116):

1. Плоское напряженное состояние:

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{32} = 0. \quad (1.120)$$

Перепишем условие Мизеса–Губера с учетом (1.122):

$$\sigma_{11}^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{33}^2 + 6\sigma_{13}^2 = 2\sigma_s^2; \quad \sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{33} + 3\sigma_{13}^2 = \sigma_s^2. \quad (1.121)$$

В главных напряжениях формулы (1.123) имеют вид:

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = \sigma_s^2. \quad (1.122)$$

2. Плоское деформированное состояние:

Пусть одна из деформаций, например,  $\varepsilon_2 = 0$ . Вследствие закона Гука все деформации (а, следовательно, и напряжения), имеющие индекс «2», равны нулю, а также справедливо соотношение:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0. \quad (1.123)$$

Так как для пластического состояния  $\mu = \frac{1}{2}$ , из (1.123) имеем:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \text{ или } \sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2}. \quad (1.124)$$

Подставляя значения оставшихся напряжений в условие (1.116), получим:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \frac{4}{3}\sigma_s^2. \quad (1.125)$$

Введем обозначение  $\frac{4}{3}\sigma_s^2 = (\sigma_s^*)^2$ , или  $\sigma_s^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_s$  – модифицированный предел текучести. В этих обозначениях условие пластичности для плоского деформированного состояния принимает вид:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 4\sigma_{13}^2 = \sigma_s^{*2}. \quad (1.126)$$

Перейдем к главным напряжениям в (1.116):

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm \sigma_s^*. \quad (1.127)$$

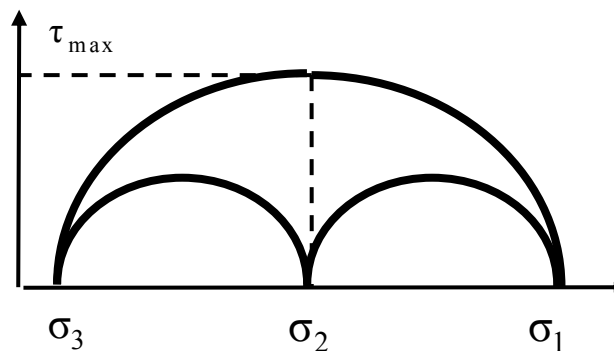


Рис. 1.19. К условию пластичности Сен-Венана – Треска

На рис. 1.19 представлены круги Мора для случая плоской деформации, откуда видно, что максимальное касательное напряжение равно полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \text{ или } \tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_s^*}{2}.$$

Но именно в таком виде (только с обычным пределом текучести) было сформулировано условие пластичности Сен-Венана – Треска, которое, правда, не вполне обоснованно обобщалось и на другие виды напряженно деформированного состояния (НДС).

5. Для получения упрощенного условия пластичности перепишем (1.119) в главных напряжениях:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_{33})^2 = 2\sigma_s^2. \quad (1.128)$$

Рассмотрим частные случаи:

1.  $\sigma_2 = \sigma_1$ ;  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$ ;  $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\sigma_s$ .
  2.  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;  $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$ ;  $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\sigma_s$ .
  3.  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ ;  $\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2 = 2\sigma_s^2$ .
- $$\frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2$$
- ;
- $\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$
- .

Если рассмотреть диаграмму Мора, то можно увидеть, что среднее напряжение в первых двух рассмотренных выше случаях принимает предельные значения, а третьем – среднее, причем в правой части частных условий пластичности можно произвести обобщение на случай произвольного значения промежуточного напряжения:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\beta\sigma_s$$
;  $1 \leq \beta \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ , (1.129)

где  $\beta$  – коэффициент, подлежащий определению.

Для определения  $\beta$  введем предварительно показатель напряженного состояния (**фактор Лоде**):

$$\nu_\sigma = \frac{EC}{AD/2} = \frac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$
. (1.130)

Для рассмотренных выше случаев:

1.  $\sigma_2 = \sigma_1$ ;  $\nu_\sigma = \frac{2\sigma_1 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = 1$ .
2.  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\nu_\sigma = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = -1$ .
3.  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ ;  $\nu_\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = 0$ .

Следовательно  $-1 \leq \nu_\sigma \leq 1$ .

Из (1.130) выразим  $\sigma_2 = \frac{\nu_\sigma(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$  и подставим его в условие пластичности (1.128). После преобразований получаем:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}\sigma_s$$
. (1.131)

Сравнивая (1.129) и (1.131), можно установить, что

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}$$
. (1.132)

Коэффициент  $\beta$  используется в упрощенном условии пластичности, которое в отличие от условия Губера–Мизеса является линейным, что существенно облегчает решение задач пластического формоизменения.

## 1.11. Физические уравнения теории пластичности

При пластическом формоизменении внешние силы могут различным образом изменяться по отношению ко времени или какому-либо другому параметру (**параметр Удквиста**). В зависимости от характера изменения внешних сил различают простое и сложное нагружение. Согласно А.А. Ильюшину, процесс нагружения является **простым**, если внешние силы от начала их приложения возрастают пропорционально общему параметру. Такое разделение процессов имеет существенное значение: в теории конечных деформаций физические уравнения могут быть представлены в достаточно простой форме; в теории пластического течения накопленная деформация определяется интегрированием интенсивности деформаций по параметру Удквиста.

**Прямые соотношения.** Для установления физических уравнений для случая простого нагружения примем ряд допущений:

1. Будем считать нагружение простым (деформации и напряжения монотонно увеличиваются или монотонно уменьшаются), при этом направления главных деформаций совпадают с направлениями главных напряжений.

2. Показатели напряженного и деформированного состояния  $V_\sigma$ ,  $V_\varepsilon$  совпадают (подобие кругов Мора).

3. Материал считается несжимаемым.

4. Деформации считаются малыми.

5. Справедлива гипотеза «единой кривой».

Первое допущение позволяет рассматривать возможность пропорционального изменения напряжений и деформаций. Из допущения о подобии кругов Мора (рис. 1.20) следует:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} = 2G', \quad (1.133)$$

где  $2G'$  – некий параметр пропорциональности.

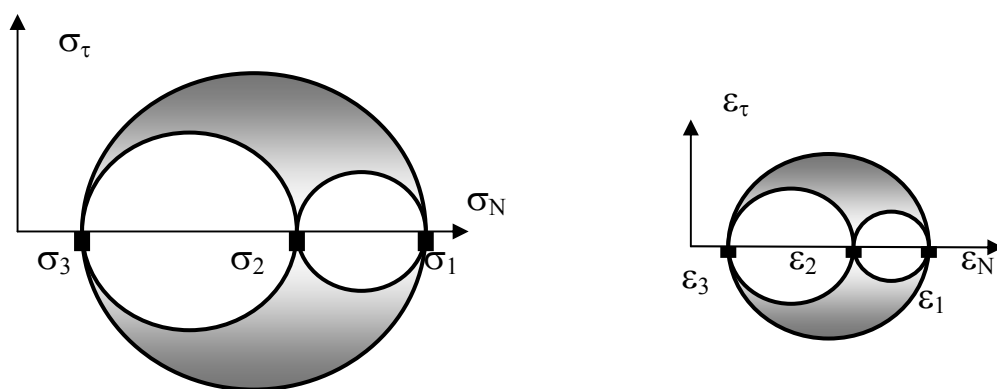


Рис. 1.20. Подобие диаграмм Мора для напряжений и деформаций

Из условия несжимаемости (третье допущение:  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ ) выразим  $\varepsilon_3$  и подставим его в одно из соотношений (1.133):

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2G' \cdot (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 2G' \cdot (\varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2). \quad (1.134)$$

Возьмем из (1.133) еще одно соотношение:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2G' \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (1.135)$$

Умножим (1.135) на 2 и сложим с (1.134):

$$2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 2G' \cdot 3\varepsilon_1; \quad \sigma_1 - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} = G' \cdot 3\varepsilon_1, \text{ откуда:}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3G'} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]. \quad (1.136)$$

В последнем уравнении величина  $3G' = E'$  называется **модулем пластичности первого рода**, а величина  $G'$  – **модулем пластичности второго рода**. Связь  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  с напряжениями можно получить путем комбинирования формулы (1.133) с условием пластичности, или же путем циклической перестановки индексов в формуле (1.136). Добавляя по аналогии с законом Гука соотношения для деформаций сдвига, имеем:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \right]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right].$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G}, \quad i \neq j. \quad (1.137)$$

Соотношения (1.137) являются физическими уравнениями теории пластичности. Они аналогичны закону Гука для упругой области:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \dots; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G}, \quad i \neq j, \quad \text{где } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (1.138)$$

Анализ соотношений (1.137):

1.  $\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ .
2.  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$ . (Плоское деформированное состояние).
3.  $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = -\frac{1}{E'} \left( \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right) \propto \sigma_{cp}$ .

При переходе из упругой в пластическую область физические уравнения должны подвергаться изменениям в части значений коэффициентов, а именно,  $E \rightarrow E'$  и  $\mu = \frac{1}{2}$ . Из последнего соотношения в (1.138) следует:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \rightarrow G' = \frac{E'}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{E'}{3}; \quad E' = 3G'. \quad (1.139)$$

**Обратные соотношения.** Для вывода обратных соотношений (выражение напряжений через деформации) используем пятое допущение. Гипотеза «единой кривой»: при произвольном напряженном деформированном состоянии зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций можно моделировать диаграммой одноосного растяжения (рис. 1.21).

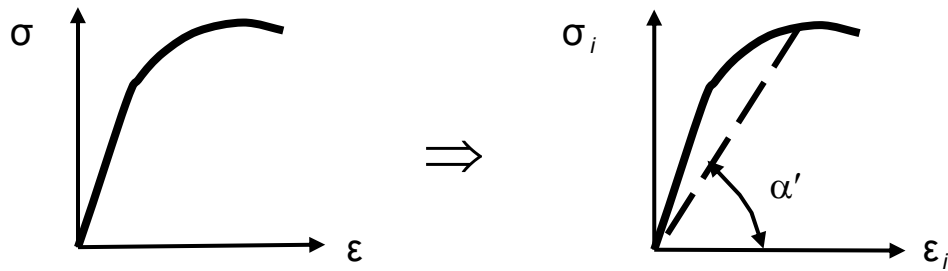


Рис. 1.21. К иллюстрации гипотезы «единой кривой»

Сделаем тождественные преобразования первого из уравнений (1.137):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{\sigma_1}{2} \right] = \frac{1}{E'} \cdot \frac{3}{2} [\sigma_1 - \sigma_{cp}].$$

Аналогично, из других уравнений получим соотношения:

$$\sigma_1 - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_1; \quad \sigma_2 - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_2; \quad \sigma_3 - \sigma_{cp} = \frac{2}{3} \cdot E' \cdot \varepsilon_3. \quad (1.140)$$

На основании гипотезы «единой кривой» рис. 1.21 имеем:

$$E' = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \approx \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (1.141)$$

Из (1.140) и (1.141) получаем:

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_1 + \sigma_{cp}; \quad \sigma_2 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_2 + \sigma_{cp}; \quad \sigma_3 = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \varepsilon_3 + \sigma_{cp}. \quad (1.142)$$

Физические уравнения (1.137) и (1.142) установлены для малых деформаций в теории конечных деформаций.

В теории пластического течения (для больших деформаций), как установлено экспериментами, в качестве физических уравнений необходимо брать связь между напряжениями и скоростями деформации. Все соотношения (1.133) – (1.142) при условии замены деформаций их скоростями будут справедливы.

**Выводы:** в разделе приведены основные сведения, относящиеся к моделированию в механике деформируемых твердых тел, преимущественно в приложении к пластическому формоизменению порошковых уплотняемых сред.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

### 2.1. Напряжения, деформации и скорости деформации. Кинематика течения

При решении технологических задач пластичности используется математический аппарат механики деформируемых сред. Напряженное состояние описывается тензором напряжений, который в системе прямоугольных координат  $x, y, z$  представляется матрицей:

$$T_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

При переходе к другой системе координат  $x', y', z'$  компоненты тензора (2.1) изменяются по величине. Существует единственная система координат 1,2,3 при которой касательные компоненты становятся равными 0, а нормальные достигают наибольших значений. Эти значения называются главными и обозначаются по неравенству  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Для обобщенной характеристики напряженного состояния применяется величина, называемая интенсивностью напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (2.2)$$

при одноосном напряженном состоянии:

$$\sigma_i = |\sigma_1|. \quad (2.3)$$

Деформированное состояние характеризуется тензором деформаций:

$$T_D = \begin{Bmatrix} e_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & e_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & e_z \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Дифференцирование компонент тензора деформаций по времени позволяет ввести понятие о тензоре скоростей деформаций:

$$\dot{T}_D = \begin{Bmatrix} \dot{e}_x & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{e}_y & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{e}_z \end{Bmatrix}. \quad (2.5)$$

Для обобщенной характеристики деформированного состояния используется величина, называемая интенсивностью деформаций:

$$e_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_3)^2}. \quad (2.6)$$



Аналогично записывается величина интенсивности скоростей деформаций:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2}. \quad (2.7)$$

Анализ кинематики процессов пластического течения сводится к установлению компонент вектора скорости течения в каждой точке  $V_x, V_y, V_z$ . Если они известны, то значения компонент вектора перемещения точки в пространстве за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  становятся известными:

$$\begin{cases} dx = v_x dt \\ dy = v_y dt, \\ dz = v_z dt \end{cases} \quad (2.8)$$

так как  $dt$  одно и то же, то можно получить уравнения траектории движения точки:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (2.9)$$

Интегрирование этих соотношений позволяет оценить конечное перемещение точки в пространстве и в итоге рассчитать конечное изменение формы деформируемого тела. В механике сплошных сред показано, что компоненты скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z$  и компоненты вектора скорости течения связаны между собой дифференциальными соотношениями:

$$\dot{\epsilon}_x = dv_x/dx, \quad \dot{\epsilon}_y = dv_y/dy, \quad \dot{\epsilon}_z = dv_z/dz. \quad (2.10)$$

Эти соотношения используются для построения и описания кинематики процессов ОМД.

## 2.2. Статика деформируемого тела

Бесконечно малый элемент формы параллелепипеда находится в статическом равновесии, если выполняются соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

называемые соотношениями статического равновесия. Следует отметить, что статическому равновесию всегда соответствует равенство пар касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (2.12)$$

### 2.3. Физические уравнения связи напряжений, скоростей и скоростей деформаций

При деформировании среды, объем (плотность) которой в процессе деформирования не изменяется, компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_x; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\gamma}_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_y; \quad \tau_{yz} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\gamma}_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\epsilon}_z; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} \dot{\gamma}_{zx}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Здесь  $\sigma_{cp}$  – среднее напряжение, вычисляемое по формуле:

$$\sigma_{cp} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3.\tag{2.14}$$

В случаях малых деформаций скорости деформаций могут быть заменены самими деформациями. Величина  $\sigma_i$  определяется в соответствии с условием пластичности.

### 2.4. Условие пластичности

При решении технологических задач ОМД чаще всего используется условие пластичности Губера–Мизеса. Его еще называют энергетическим. Согласно этому условию, пластическое состояние наступает тогда, когда энергия упругого изменения формы тела достигает определенной для данного материала величины. Можно показать, что этой формулировке условия перехода в пластическое состояние соответствует утверждение: при переходе материала в пластическое состояние интенсивность напряжений становится равной пределу текучести материала при одноосном растяжении или сжатии. Таким образом, самая экономная запись условия пластичности есть

$$\sigma_i = \sigma_m.\tag{2.15}$$

### 2.5. Работа и мощность деформации

Схема любой технологической операции ОМД может быть рассмотрена как механическая система, в которой нетрудно выделить внешние и внутренние силы. К внешним относятся силы, приложенные со стороны инструмента, силы контактного трения и силы сопротивления, приложенные со стороны внеконтактных зон. К внутренним силам относятся напряжения (нормальные и касательные). Вся энергия, подводимая извне, затрачивается на накопление потенциальной энергии упругой деформации и кинетической энергии пластического изменения формы. Пластическая энергия переходит, как правило, в тепло, что обуславливает ее необратимость. Соотношение между упругой и пластической деформацией изменяется в зависимости от степени деформации. В большинстве случаев при ОМД можно считать, что вся энергия затрачивается на пластическую деформацию.

По закону сохранения энергии можно записать, что суммарная работа системы равна 0:

$$A + (-A_i) = 0, \quad (2.16)$$

где  $A$  – работа внешних сил;  $A_i$  – работа внутренних сил.

Если значение работ отнести к единице времени, то получим уравнение для мощностей внешних и внутренних сил:

$$N + (-N_i) = 0. \quad (2.17)$$

В свою очередь работа деформации может быть разложена на работу изменения формы и объема. С учетом того, что в большинстве случаев мы имеем дело с большими пластическими деформациями, то работой по изменению объема можно пренебречь. В механике деформируемых сред показано, что мощность деформации тела, имеющего объем  $V$ , равна

$$N = \int_{(V)} \sigma_i \dot{e}_i dV. \quad (2.18)$$

Работа вычисляется по аналогичной формуле, но в (2.18) вместо  $\dot{e}_i$  принимается просто  $e_i$ .

Если в пластическом состоянии имеет место деформационное упрочнение, то в (2.18)  $\sigma_i$  равно:

$$\sigma_i = \sigma_T (1 + \lambda e_i^n), \quad (2.19)$$

где  $\lambda$  и  $n$  – показатели деформационного упрочнения материала, определенные по кривой одноосного растяжения-сжатия.

В частном случае можно использовать формулу (2.19) при  $n=1$ . Эффект деформационного упрочнения является существенным и обязательно учитываемым при холодном деформировании металлов.

При горячем деформировании металлов обычно  $\lambda \approx 0$ , но величина  $\sigma_T$  зависит от скорости деформации, т.е. имеет место скоростное упрочнение. Зависимость сопротивления деформации от скорости удобно аппроксимировать степенной функцией

$$\sigma_i = \sigma_T \cdot \dot{e}_i^m, \quad (2.20)$$

где  $m$  – показатель скоростного упрочнения.

Величина  $m$  находится по результатам испытаний материала при различных скоростях деформации.

## 2.6. Граничные условия. Контактное трение

В механике деформируемых сред используется три вида граничных условий: статические граничные условия (в напряжениях), кинематические (в скоростях течения или перемещения), смешанные граничные условия. Граничные условия – это условия, которые заранее известны и должны быть выполнены. Если мы задаем выражение для скоростей течения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , которые заведомо удовлетворяют кинематическим граничным условиям, то такое поле скоростей называется кинематически возможным. Из силовых условий на контуре очень важными для анализа процессов ОМД являются условия контактного трения, которые заранее должны быть заданы. В том

методе решения технологических задач, который излагается в данном руководстве силы трения должны быть заданы однозначно, причем не в виде записи закона трения (сухое трение, жидкостное трение), а непосредственно. Практика решения технологических задач, как правило, связана с заданием сил трения по формуле:

$$\tau_k = \psi \tau_s, \quad (2.21)$$

где  $\tau_s$  – предел текучести при контактом сдвиге для обрабатываемого материала в приконтактном слое;  $\psi$  – параметр трения, изменяющийся в пределах от 0 до 1.

Можно показать, что предел текучести при сдвиге  $\tau_s$  в случае выполнения условия пластичности выражается через предел текучести при одноосном деформировании  $\sigma_T$  по соотношению:

$$\tau_s = \sigma_T / (\sqrt{3}). \quad (2.22)$$

В итоге имеем:

$$\tau_k = \psi \sigma_T / (\sqrt{3}). \quad (2.23)$$

**Выводы:** представленные уравнения течения позволяют дать оценку напряженно деформированному состоянию в процессах ОМД компактных и порошковых материалов.

### 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРОЦЕССОВ ОМД

#### 3.1. Вариационные (энергетические) принципы механики деформируемого тела. Принцип возможных изменений действительного поля скоростей

Практическое решение технологических задач пластичности требует применения универсальных и простых вычислительных процедур, доступных инженеру-технологу. Этому требованию отвечает энергетический метод решения технологических задач пластичности. Энергетический метод базируется на вариационных принципах механики деформируемого тела [1]. Упрощенная трактовка этих принципов применительно к ОМД состоит в следующем.

Считается, что к деформируемому объему металла подводится мощность  $N$ . Эта мощность расходуется на деформацию металла в зоне, расположенной между бойками  $N_i$ .

$$N_i = \iiint_V \sigma_i l_i dV. \quad (3.1)$$

Здесь  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  
 $l_i$  – интенсивность скоростей деформации;  
 $V$  – пластически деформируемый объем тела.

На преодоление сил трения, возникающих на контакте между инструментом и обрабатываемым металлом:

$$N_t = \iint_{F_k} \tau_k V_{ck} dF_k, \quad (3.2)$$

где  $\tau_k$  – сила контактного трения;  $V_{ck}$  – скорость контактного скольжения металла по инструменту;  $F_k$  – площадь контакта.

На преодоление сил сопротивления срезу, действующих по поверхности, разделяющей пластическую зону и внешние зоны:

$$N_{cp} = \iint_{S_{cp}} \tau_{cp} V_{cp} dS_{cp}, \quad (3.3)$$

где  $\tau_{cp}$  – напряжение среды  $\sigma_m/\sqrt{3}$ ;  $V_{cp}$  – скорость среза;  $S_{cp}$  – площадь среза.

Между перечисленными компонентами мощности имеется взаимосвязь, определяемая уравнением баланса мощности:

$$N = N_i + N_{cp} + N_t. \quad (3.4)$$

Кроме того согласно принципу возможного изменения поля скоростей течения (принцип Журдена), можно использовать условие минимума расходуемой мощности, обеспечиваемого действительным полем скоростей течения:

$$\partial(N_i + N_t + N_{cp}) = 0. \quad (3.5)$$

Представленное уравнение означает: если поле скоростей может быть задано различными функциями (возможно варьирование полей), то на самом деле реализуются те функции, которые обеспечивают минимум расходуемой мощности.

### 3.2. Общая схема решения технологических задач пластического течения с применением энергетических принципов и прямого вариационного метода Ритца (на примере задачи об осадке заготовки имеющей форму параллелепипеда)

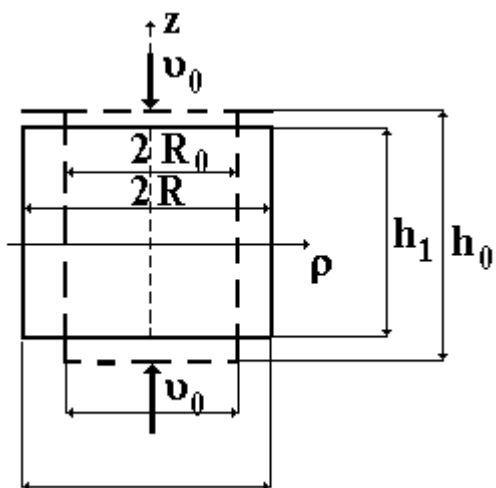


Рис. 3.1 Схема осадки пористой спеченной заготовки

#### 3.2.1. Осадка цилиндра с учетом контактного трения (однородная деформация)

Пластическое сжатие находит широкое применение как одна из основных операций обработки металлов давлением. Трение обуславливает возникновение сложной трехслойной схемы напряженного состояния. На преодоление сил трения приходится затрачивать дополнительную работу. Будем рассматривать задачу в простейшем случае, т.е. считать деформацию по высоте однородной (рис. 3.1), тогда скорость течения вдоль оси  $z$ :

$$V_z = V_0 - \frac{2 \cdot z}{h}, \quad (3.6)$$

где  $V_0$  – линейная скорость перемещения бойков;  $h$  – текущая высота.

Скорость деформации:

$$N_\tau = 2b_0 \psi \frac{\bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} \frac{RV_b}{R\alpha} \left[ (\alpha - 2\gamma)R\alpha + h_N \ln \left( \frac{h_N^2}{h_0 h_1} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Скорость деформаций вдоль осей  $\rho$  и  $\theta$  соответственно равны:

$$N_b = 2b_0 \iint \tau_k V_b dL_k = 2b_0 \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} V_b R (\alpha - 2\gamma);$$

$$2b_0 \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} V_b R (\alpha - 2\gamma) = \bar{\sigma}_m V_0 b_0 h_0 + 2b_0 \psi \frac{\bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} \frac{V_b R}{\alpha R} \left[ (\alpha - 2\gamma)R\alpha + h_N \ln \left( \frac{h_N^2}{h_0 h_1} \right) \right]. \quad (3.8)$$

Тогда на основании условия несжимаемости среды имеем:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\rho}{\rho} - \frac{2v_0}{h} = 0 \quad (3.9)$$

или

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} = -\frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Решим однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0 \quad (3.11)$$

или

$$\frac{\partial v_\rho}{v_\rho} = -\frac{\partial \rho}{\rho}. \quad (3.12)$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln v_\rho = -\ln \rho + \ln c. \quad (3.13)$$

Тогда выражение для скорости течения металла вдоль оси примет вид:

$$v_\rho = \frac{c}{\rho} \quad (3.14)$$

Подставим его в (3.10):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dc}{d\rho} - \frac{c}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^2} = \frac{2v_0}{h} \quad (3.15)$$

или

$$c = \frac{1}{2} \frac{2v_0}{h} \rho^2 + c_1. \quad (3.16)$$

С учетом (3.14):

$$v_\rho = \frac{v_0}{h} \rho + \frac{c_1}{\rho}. \quad (3.17)$$

При  $\rho = 0, v_\rho = 0, c_1 = 0$ .

Учитывая, что  $v_\rho = v_\theta$ , получим поле скоростей течения среды, которое задается уравнениями:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \frac{v_0}{h} \rho, \\ v_\theta &= \frac{v_0}{h} \rho, \\ v_z &= -\frac{2v_0}{h} z. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Компоненты тензора скорости деформации:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\rho &= \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} = \frac{v_0}{h}, \\ \dot{\epsilon} &= \frac{\partial v_\theta}{\partial \rho} = \frac{v_0}{h}, \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{2v_0}{h}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставив эти значения в выражение для интенсивности скорости деформации, получим:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{2v_0}{h}. \quad (3.20)$$

Далее найдем скорость эквивалентной деформации:

$$\dot{\epsilon}_{экв} = \frac{2v_0}{h}. \quad (3.21)$$

Общая мощность деформации пористого тела:

$$N = N_i + N_\tau, \quad (3.22)$$

$$N_i = \iiint_{(v)} \sigma_i \dot{\epsilon}_i dv, \quad (3.23)$$

где  $\sigma_{экс} = \sigma_T$ ,

$$N_i = \sigma_i \frac{2\nu_0}{h} \nu. \quad (3.24)$$

Мощность сил контактного трения, как известно:

$$N_\tau = \iint_{(F_k)} \tau_k \nu_\rho dF_k. \quad (3.25)$$

Силу трения примем:

$$\tau_k = \psi \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}. \quad (3.26)$$

После подстановок получим:

$$N_\tau = 2 \int_0^R \frac{\psi \sigma_i}{\sqrt{3}} \frac{\nu_0}{h} \rho 2\pi \rho d\rho = \frac{2\nu_0}{h} \psi \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \frac{2\pi}{3} R^3. \quad (3.27)$$

Разделим левую и правую часть на текущий объем деформируемого тела  $\nu = (\pi r^2 h)$ :

$$\frac{N_\tau}{\nu} = \frac{2\nu_0}{h} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\psi \sigma_i}{\sqrt{3h}}. \quad (3.28)$$

Окончательно выражение баланса мощности перепишем в таком виде:

$$\frac{N}{\sigma_i \nu \frac{2\nu_0}{h}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{R}{\sqrt{3h}}. \quad (3.29)$$

Мощность инструмента необходимая для осадки цилиндра:

$$N = 2p_{cp} \pi R^2 \nu_0, \quad (3.30)$$

где  $p_{cp}$  – среднее удельное давление на бойках инструмента.

Используя (3.29) и (3.30), на основании равенства работ получим следующее равенство:

$$2p_{cp} \pi R^2 \nu_0 = \sigma_i V \frac{2\nu_0}{h} + \sigma_i V \frac{2\nu_0}{h} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\psi R}{\sqrt{3h}} \quad (3.31)$$

или

$$\frac{p_{cp}}{\sigma_i} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\psi r}{h}. \quad (3.32)$$

Для этого уравнения разработан алгоритм и программы вычисления усилия осадки в зависимости от основных параметров: диаметра и высоты заготовки, степени деформации (хода пресса), предела текучести и параметра трения.

### 3.2.2. Осадка широкой полосы плоско-параллельными бойками

Рассмотрим так называемую плоскую задачу, т. е. когда перемещения вдоль оси  $y$  запрещены т. е.  $\nu_y; \dot{\epsilon}_y$ .

Полоса начальной толщины  $h_0$ , неограниченной длины  $l$  осаживается между плоско-параллельными бойками шириной  $b$  (см. рис. 3.2) до какой-то текущей высоты  $h$ . Будем считать, что после прохождения за границу зоны  $l$  металл не участвует в рассмотрении.

Скорость перемещения бойков примем постоянной и равной  $\nu_0$ .



Скорость перемещения металла в зоне *I* примем прямопропорциональной координатам точек, тогда можно записать:

$$v_z = -\frac{2v_0}{h} \cdot z. \quad (3.33)$$

На основании постоянства секундного объема можно записать:

$$v_{z=h/2} = v_{x=b/2} \cdot h, \quad (3.34)$$

откуда:

$$v_{x=b} = 2v_0 \frac{b}{h},$$

$$v_x = 2v_0 \frac{x}{h}. \quad (3.35)$$

Скорости описываются:

$$\begin{cases} v_x = \frac{2v_0}{h}; \\ v_y = 0; \\ v_z = -\frac{2v_0}{h}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Найдем скорости деформаций по (3.36):

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \frac{2v_0}{h}; \\ \dot{e}_y = 0; \\ \dot{e}_z = -\frac{2v_0}{h}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Интенсивность скоростей деформаций с учетом (3.37) будет:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{2v_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{2v_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{2v_0}{h}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{h}. \quad (3.38)$$

Рассмотрим составляющие уравнения баланса мощности.

Мощность, подводимая бойками:

$$N = 2p_{cp} \cdot b \cdot a \cdot v_0, \quad (3.39)$$

где *a* – ширина полосы.

Мощность, расходуемая на деформацию объема:

$$N_0 = \iiint_V \sigma_T \dot{e}_i dV = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_T \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{h} dx dy dz = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_T v_0 ab. \quad (3.40)$$

Мощность, затрачиваемая на трение по плоскости бойка:

$$N_i = \iint_{F_K} \tau_K v_x dF_K = -2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2v_0}{h} x \phi \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} dx dy = 2 \frac{v_0}{h} \phi \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} b^2 a. \quad (3.41)$$

Мощность среза на границе зон *I* и *II*:

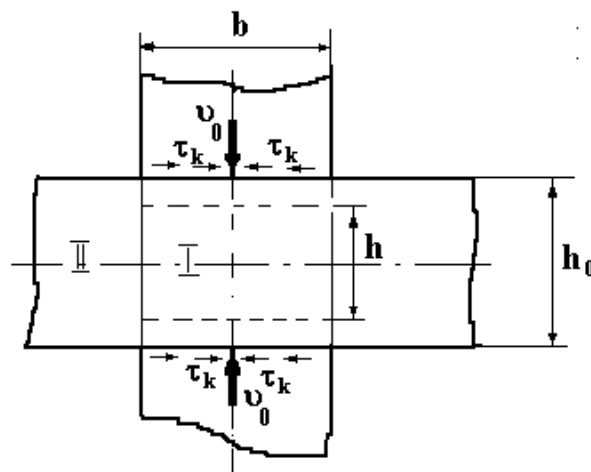


Рис. 3.2. Осадка широкой полосы плоскопараллельными бойками

$$Ncr = \iint_S \tau_s v_{cr} dS = 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_s \frac{2v_0}{h} z dz dy = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{2v_0}{h} ba^2. \quad (3.42)$$

Уравнение баланса мощности будет выглядеть так:

$$P_{cp} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T \left( 2 + \phi \frac{b}{h} + \frac{a}{h} \right). \quad (3.43)$$

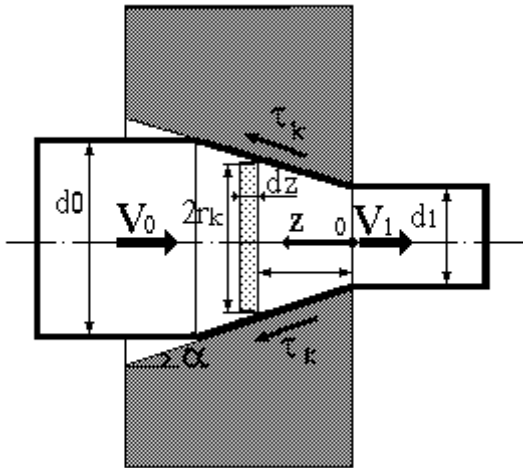


Рис. 3.3. Схема волочения круглого прутка

### 3.2.3. Задача о волочении

Процесс волочения характеризуется тем, что процесс не возможен без упрочнения. Поэтому важнейшим параметром волочения является установление предельной степени деформации, при которой нет отрыва проволоки.

Рассмотрим следующую схему установившегося процесса волочения (рис. 3.3).

Через волоку диаметром  $d_1$  и углом образующей  $\alpha$  протягивается пруток с диаметром  $d_0$ . Будем считать, что скорость волочения  $V_1$  постоянная и связана со скоростью на входе в волоку  $V_0$  соотношением:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{d_0^2}{d_1^2} = \frac{r_0^2}{r_1^2}, \quad (3.44)$$

что вытекает из условий постоянства секундного объема. Для произвольного сечения на расстоянии  $Z$  от выхода имеем:

$$V_z = V_1 \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 = V_1 \left( \frac{r_z}{r_1} \right)^{-2}. \quad (3.45)$$

Рассмотрим компоненты скоростей деформаций:

$$\begin{cases} \dot{e}_\rho = \dot{e}_\theta \frac{de_\rho}{dt} = \frac{dr_z}{r_z dt} \\ \dot{e}_z = \frac{dV_z}{dz} = \frac{dV_z}{dr_z} \frac{dr_z}{dz} = -2r_1^2 r_z^{-3} V_1 \frac{dr_z}{dz} \end{cases} \quad (3.46)$$

Выражение для интенсивности скоростей деформации выглядит так:

$$\dot{e}_i = -2 \frac{V_1}{r_z} \left( \frac{r_z}{r_1} \right)^{-2} \frac{dr_z}{dz}. \quad (3.47)$$

При волочении имеет место контактное скольжение по наклонной поверхности со скоростью

$$V_{ck} = \frac{|V_z|}{\cos \alpha} = \frac{V_1}{\cos \alpha} \left( \frac{r_z}{r_1} \right)^{-2}. \quad (3.48)$$

Силу контактного трения примем

$$\tau_k = \Psi \frac{\sigma_t}{\sqrt{3}}. \quad (3.49)$$

Подводимая посредством захватов к очагу мощность волочения:

$$N = q_1 \pi r_1^2 V_1, \quad (3.50)$$

где  $q_1$  – среднее напряжение в сечении выходящего прутка.

Мощность будет расходоваться на:

- изменение формы:

$$N_f = \int_{(V)} \sigma_T \dot{\epsilon}_i dV, \quad (3.51)$$

- контактное трение:

$$N_k = \int_{(F_k)} \tau_k V_{ck} dF_k, \quad (3.52)$$

- срез или интенсивный сдвиг материала на разрывах радиальных скоростей в местах входа  $n_{cp}^1$  и выхода  $n_{cp}^2$  прутка в волоку:

$$N_{cp} = N_{cp}^1 + N_{cp}^2 = \int_{(F_{cp})} \tau_s V_{cp} dF_{cp}, \quad (3.53)$$

- работа сил противонапряжения:

$$N_H = q_0 \pi r_0^2 V_{01}. \quad (3.54)$$

В результате чего можно записать уравнение баланса мощностей:

$$N = N_f + N_k + N_{cp}, \quad (3.55)$$

или

$$q_1 = \bar{\sigma} \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) \left( 2 + \frac{4\Psi}{\sqrt{3} \sin 2\alpha} \right) + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \frac{\sigma_T + \sigma_{T1}}{\sqrt{3}}. \quad (3.56)$$

### 3.2.4. Прокатка широкой полосы

Рассмотрим установившийся процесс прокатки на цилиндрических валках равного диаметра низкой полосы (плоская деформация) прямоугольного сечения, влияние внешних зон учитывать не будем.

Обозначим абсолютную величину скорости входа полосы в очаг деформации  $V_0$ , тогда горизонтальная компонента скорости в произвольном сечении:

$$V_x = -V_0 h_0 / h_x, \quad (3.57)$$

где  $h_0$  – начальная высота полосы;  $h_x$  – высота в произвольном сечении.

Секундный расход металла в сечении  $x$  будет постоянен:

$$d(V_x h_x b_0) / V_x h_x b_0 = 0. \quad (3.58)$$

Скорость обжатия будет равна:

$$\dot{\epsilon} = \frac{dh_x}{dh_x}. \quad (3.59)$$

Закон изменения горизонтальной скорости течения по длине очага деформации будет выглядеть так:

$$V_x = -V_0 h_0 / h_x. \quad (3.60)$$

Далее рассмотрим равенства:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}; \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}; \dot{\epsilon}_z = 0; \quad (3.61)$$

$$\dot{\epsilon}_x = V_0 \frac{h_0}{h_x} \frac{dh_x}{dx}. \quad (3.62)$$

Учитывая условия постоянства объема:

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0, \quad (3.63)$$

получим

$$\dot{\epsilon}_y = -V_0 \frac{h_0}{h_x} \frac{dh_x}{dx}. \quad (3.64)$$

Компоненту скорости течения  $V_y$  найдем интегрированием второго уравнения (3.56) при условии, что  $V_y = 0$  при  $y = 0$ . В результате получим:

$$V_y = -V_0/h_x (h_0/h_x) y \, dh_x/dx. \quad (3.65)$$

Вычислим интенсивности скоростей деформации:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{V_0}{h_x} \left( \frac{h_0}{h_x} \right) \frac{dh_x}{dx}. \quad (3.66)$$

Найдем мощность внутреннего сопротивления:

$$N_i = \iiint_{(V)} \sigma_m \dot{\epsilon}_i dV \quad (3.67)$$

Приращение объема материала  $dV = b_0 h_x dx$ .

$$N_i = b_0 \bar{\sigma}_m \int_0^L h_x \frac{V_0}{h_x} \left( \frac{h_0}{h_x} \right) \frac{dh_x}{dx} dx. \quad (3.68)$$

Или окончательно:

$$N_i = \bar{\sigma}_m V_0 b_0 h_0, \quad (3.69)$$

где  $\bar{\sigma}_m$  – среднее сопротивление деформации металла по очагу.

Далее определим мощность сил трения:

$$N_\tau = 2 \iint_{(F_k)} \tau \bar{V}_{ck} dF_k = 2b_0 \int_{(L_k)} \tau_k \bar{V}_{ck} dL_k, \quad (3.70)$$

где  $\bar{V}_{ck}$  – скорость относительного скольжения металла в зоне отставания ( $x < x_N$ ).

$$\bar{V}_{ck} = V_b - \frac{|V_x|}{\cos \varphi}, \quad (3.71)$$

где  $V_b$  – скорость валка окружная.

С учетом (3.62)

$$\bar{V}_{ck} = V_b - \frac{V_0}{\cos \varphi} \left( \frac{h_0}{h_x} \right) \quad (3.72)$$

при  $x = x_N$  или, что то же самое, при  $h_x = h_N$  скорость относительного скольжения равна нулю ( $V_{ck} = 0$ ). Следовательно,

$$V_b - V_0/\cos \varphi (h_0/h_N) = 0, \quad (3.73)$$

откуда:

$$V_0 = V_b (h_N/h_0) \cos \varphi, \quad (3.74)$$

тогда скорость относительного скольжения для зоны отставания:

$$\bar{V}_{ck} = V_b \left[ 1 - \frac{h_N \cos \gamma}{h_x \cos \varphi} \right]. \quad (3.75)$$

Для зоны опережения ( $x > x_N$ )

$$\bar{V}_{ck} = \frac{|V_x|}{\cos \varphi} - V_b \quad (3.76)$$

или, с учетом (3.55) и (3.69):

$$\bar{V}_{ck} = V_b \left[ \frac{h_N \cos \gamma}{h_x \cos \varphi} - 1 \right]. \quad (3.77)$$

Выражение для сил трения примем:

$$\tau_k = \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}}. \quad (3.78)$$

С учетом (3.75), (3.76) мощность трения:

$$N_\tau = 2b_0 \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} R V_0 \left[ \int_{-\gamma}^{\alpha} \left( 1 - \frac{h_N \cos \gamma}{h_0 \cos \varphi} \right) d\varphi + \int_0^{\gamma} \left( \frac{h_N \cos \gamma}{h_x \cos \varphi} - 1 \right) d\varphi \right]. \quad (3.79)$$

Если текущую высоту полосы в очаге деформации выразить через угол захвата ( $\alpha$ ) и текущий центральный угол ( $\varphi$ ):

$h_x = h_1 + R\alpha\varphi$ ;  $dh_x = h_1 + R\alpha d\varphi$ , или

$$d\varphi = dh_x / R\alpha, \quad (3.80)$$

и считать в первом приближении, что  $\cos \gamma / \cos \varphi \approx 1$ , то

$$N_\tau = 2b_0 \psi \frac{\bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} \frac{R V_b}{R \alpha} \left[ (\alpha - 2\gamma) R \alpha - \int_{h_N}^{h_0} h_N h_x^{-1} dh_x + \int_{h_1}^{h_N} h_N h_x^{-1} dh_x \right]. \quad (3.81)$$

После взятия интегралов и ряда преобразований, окончательно получим:

$$N_\tau = 2b_0 \psi \frac{\bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} \frac{R V_b}{R \alpha} \left[ (\alpha - 2\gamma) R \alpha + h_N \ln \left( \frac{h_N^2}{h_0 h_1} \right) \right]. \quad (3.82)$$

Мощность, подводимая со стороны валков:

$$N_b = 2b_0 \iint \tau_k V_b dL_k = 2b_0 \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} V_b R (\alpha - 2\gamma). \quad (3.83)$$

Составим условие баланса мощностей:

$$N_b = N_i + N_\tau \quad (3.84)$$

и, используя соотношения (3.83), (3.69), (3.82), получим:

$$2b_0 \frac{\psi \bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} V_b R (\alpha - 2\gamma) = \bar{\sigma}_m V_0 b_0 h_0 + 2b_0 \psi \frac{\bar{\sigma}_m}{\sqrt{3}} \frac{V_b R}{\alpha R} \left[ (\alpha - 2\gamma) R \alpha + h_N \ln \left( \frac{h_N^2}{h_0 h_1} \right) \right]. \quad (3.85)$$

При прокатке одним из основных параметров является положение нейтрального сечения. Поэтому далее работа была посвящена нахождению положения нейтрального сечения в зависимости от технологических параметров.

### 3.3. Преимущественно пластическое деформирование увлажненной порошковой смеси

После плотной укладки частиц (завершение стадии структурного преобразования и преимущественно упругого деформирования начинается стадия преимущественно пластического деформирования, которое происходит первоначально на отдельных частицах в силу их различия форм и размеров, что позволяет на локальных участках достигать условия наступления текучести. Такие локальные участки в дальнейшем могут сливаться, а плоскости скольжения могут пересекать плотные («схваченные») границы соседних частиц. В этом смысле процесс деформирования увлажненной порошковой смеси практически не отличается от деформирования сплошных материалов (за исключением выполнения условия несжимаемости).

Система уравнений для определения параметров напряженно-деформированного состояния без учета массовых и инерционных сил представляется в следующем виде [2–4]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3.86)$$

$$\sigma_i = \psi \sigma_s, \quad (3.87)$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{m,i} \dot{u}_{m,j}), \quad (3.88)$$

$$e_{mlj} \cdot e_{nik} \cdot e_{ij,kl} = 0, \quad (3.89)$$

$$\dot{e}_k = \frac{3}{2E'}(\sigma_k - \sigma_0), \quad (3.90)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\psi$  – функция модификации условия пластичности за счет сжимаемости порошковой массы;  $\sigma_s$  – предел текучести;  $\dot{e}_{ij}$  – скорости деформации;  $\dot{u}_i$  – скорости перемещений;  $e_{mlj}$  – псевдо-тензор Леви-Чивиты;  $\sigma_k$  – главное значение напряжения;  $\sigma_0$  – среднее напряжение;  $E'$  – модуль пластичности.

Уравнения (3.86) представляют собой уравнения равновесия; уравнения (3.87) – условие пластичности; уравнения (3.88) – связь скоростей деформаций и перемещений; уравнения (3.89) – условия сплошности; уравнения (3.90) – физические уравнения. К этим уравнениям необходимо присоединить условие сжимаемости и граничные условия, которые существенно зависят от типа решаемой задачи. Система уравнений (3.86) – (3.90), представленная в тензорном виде в декартовой системе координат, определяет капиллярную прочность структуры и механизм отвода флюида.

Дальнейшие стадии деформирования рассматриваются в приложении к двум важным технологическим задачам деформирования: прессованию в закрытой матрице и выдавливанию с противодавлением.

### 3.3.1. Прессование в закрытой матрице

#### Напряжения в теле прессовки

Для установления закономерностей прессования в закрытой матрице рассмотрим матрицу цилиндрической формы (рис. 3.4). Используем метод прямого интегрирования. Примем следующие допущения:

1. Представительный элемент объема, образованный вертикальными плоскостями, расположенными эквидистантно от оси симметрии, деформируется в условиях плоской деформации.

2. Упрочнение материала не учитывается.

3. Механические характеристики рассматриваемого массива не отличаются от тех же характеристик материала порошка.

4. Касательные напряжения являются функцией только координаты  $x_3$ .

5. На границах трение учитывается по закону трения Зибеля.

Для выделенного элемента «а» первое допущение позволяет записать:

$$\sigma_{ij} \neq f(x_2) \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0. \quad (3.91)$$

С учетом соотношений (3.91) уравнения равновесия (3.86) можно представить в виде:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \sigma_{31,3} + \sigma_{33,3} = 0. \quad (3.92)$$

Применяя операторы дифференцирования « $_{,3}$ » и « $_{,1}$ » к первому и второму уравнению (3.92) соответственно с последующим вычитанием второго уравнения из первого, получим:

$$(\sigma_{11} - \sigma_{33})_{,31} + \sigma_{13,33} + \sigma_{31,11} = 0. \quad (3.93)$$

Преобразуем условие пластичности (3.87) с учетом второго допущения и условия (3.91) к виду:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{13})^2} = \psi \sigma_s. \quad (3.94)$$

С учетом первого допущения преобразование условия (3.94) приводит к следующей форме условия пластичности:

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2 \sqrt{\frac{\psi^2 (\sigma_s)^2}{3} - (\sigma_{13})^2}. \quad (3.95)$$

При преобразованиях для получения уравнения (3.95) учтено, что знак  $\sigma_{33}$  – отрицательный, причем, модуль этого напряжения превышает значения других напряжений.

Подстановка условия пластичности (3.95) в уравнение (3.94) с учетом четвертого допущения дает:

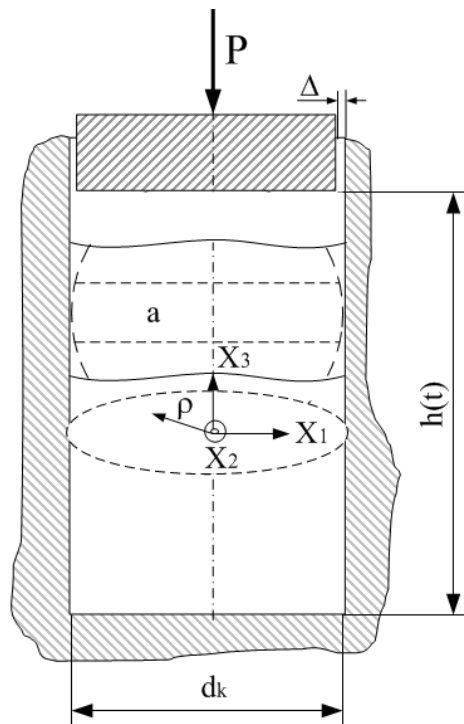


Рис. 3.4. схема формовки порошковой смеси в матрице

$$\sigma_{13,33} = 0. \quad (3.96)$$

Интегрирование уравнения (3.92) приводит к решению:

$$\sigma_{13} = C_1 + C_2 x_3, \quad (3.97)$$

где  $C_1, C_2$  – константы интегрирования, которые определяются из условий:

$$\sigma_{13}(x_3 = 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_3 = \frac{h}{2}) = \tau_k, \quad (3.98)$$

где  $\tau_k$  – контактное касательное напряжение.

Из соотношений (3.73) и (3.84) следует:

$$\sigma_{13} = \frac{2\tau_k}{h} x_3. \quad (3.99)$$

Подстановка (3.99) в (3.92) и интегрирование входящих в последнюю формулу уравнений дает решения:

$$\sigma_{11} = -\frac{2\tau_k}{h} x_1 + \varphi_1(x_3), \quad \sigma_{33}(x_1) = \varphi_2(x_1), \quad (3.100)$$

где  $\varphi_1(x_3), \varphi_2(x_1)$  – некоторые функции, подлежащие определению.

Подставляя решения (3.100) в условие пластичности (3.95) и разделяя функциональные зависимости по  $x_1$  и  $x_3$ , получим:

$$-\frac{2\tau_k}{h} x_1 - \varphi_2(x_1) = 2\sqrt{\frac{\psi^2(\sigma_3)^2}{3} - (\sigma_{13})^2} - \varphi_1(x_3). \quad (3.101)$$

Левая и правая часть уравнения (3.101) зависит от разных аргументов, а в таком случае равенство обеих частей возможно лишь в случае, когда каждая из них равняется некоторой константе, например,  $C$ . Выразив из этого условия  $\varphi_2(x_1)$  и  $\varphi_1(x_3)$ , через константу  $C$  и подставив их в решения (3.100), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{2\tau_k}{h} x_1 + 2\sqrt{\frac{\psi^2(\sigma_3)^2}{3} - (\frac{2\tau_k}{h} x_3)^2} + C, \\ \sigma_{13} &= \frac{2\tau_k}{h} x_3, \\ \sigma_{33} &= -\frac{2\tau_k}{h} x_1 + C. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Ввиду осевой симметрии задачи, выбор направления оси  $x_1$  системы координат можно считать произвольным в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, а потому напряжение  $\sigma_{33}$  из формулы (3.102) можно представить в виде:

$$\sigma_{33} = -\frac{2\tau_k}{h} \rho + C, \quad (3.103)$$

а, учитывая пятое допущение и полагая  $\tau_k = -\sigma_s/2$ , формулу (3.103) можно представить в виде:

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_s}{h} \rho + C. \quad (3.104)$$

Константу  $C$  в решении (3.104) можно найти из граничного условия:

$$\sigma_\rho(\rho = \frac{d_k}{2}) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \lambda, \quad (3.105)$$



где  $\lambda$  – податливость пояска под зазором, зависящая от высоты прессовки, зазора между пуансоном и матрицей, условий увлажнения смеси, качества рабочих поверхностей технологического оснащения и толщины стенок матрицы.

В этом случае можно считать напряжения  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_\rho$  главными. Тогда условие пластичности (3.94) трансформируется к виду:

$$\sigma_\rho - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \psi. \quad (3.106)$$

Подставляя (3.104) в (3.106) и удовлетворяя граничному условию (3.106), определяем значение константы:

$$C = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s (\psi + \lambda) + \frac{\sigma_s d_k}{2h}\right). \quad (3.107)$$

Тогда, с учетом значения константы (3.103), получим расчетную формулу для  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 = -\sigma_s \left( \frac{2}{\sqrt{3}} (\psi + \lambda) - \frac{\rho - \frac{d_k}{2}}{h} \right). \quad (3.108)$$

Таким образом, для каждой стадии деформирования (отслеживается по значению  $h$ ) можно определить распределение напряжений по телу прессовки на основе формул (3.108) и (3.106).

#### *Давление на пуансоне*

Полная сила на пуансоне  $P$  складывается из силы деформирования  $P_d$  и силы преодоления трения  $P_f$ :

$$P = P_d + P_f. \quad (3.109)$$

Сила деформирования может быть найдена интегрированием напряжения  $\sigma_3$  по поверхности пуансона:

$$P_d = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{d_k}{2}} |\sigma_3| \rho \cdot d\rho = \frac{\sigma_s \pi (d_k)^2}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} (\psi + \lambda) + \frac{d_k}{6h} \right). \quad (3.110)$$

Откуда делением обеих частей соотношения (3.110) на площадь получим давление деформирования:

$$P_d = \sigma_s \left( \frac{2}{\sqrt{3}} (\psi + \lambda) + \frac{d_k}{6h} \right). \quad (3.111)$$

Давление от преодоления трения  $p_f$  можно найти путем использования метода баланса работ:

$$\pi d_k h \frac{u_3}{2} f \sigma_s = P_f u_3 \frac{\pi (d_k)^2}{4}, \quad (3.112)$$

где  $u_3$  – перемещение в направлении оси  $x_3$ ;  $f$  – коэффициент трения.

Из формулы (3.112) следует:

$$P_f = 2 f \sigma_s \frac{h}{d_k}. \quad (3.113)$$

Давление на пуансоне получается суммированием давлений, определяемых формулами (3.106) и (3.113):

$$P = \sigma_s \left( \frac{2}{\sqrt{3}} (\psi + \lambda) + \frac{d_k}{6h} + 2f \frac{h}{d_k} \right). \quad (3.114)$$

Давление достигает оптимума при значении  $\frac{d_k}{h} = \sqrt{12f}$ , в силу чего получаем из (3.114):

$$P = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s (\psi + \lambda + \sqrt{f}). \quad (3.115)$$

Это давление можно считать предельным для рассматриваемой стадии пластического формоизменения в условиях сравнительно мягких граничных условий, причем для границ этого предела:

$$(\psi + \lambda)_{opt} \approx \frac{h_4}{4} + 1, \quad (3.116)$$

где  $h_4$  – высота прессовки к последней стадии преимущественно пластического деформирования или же высота прессовки компактного материала.

### 3.3.2. Выдавливание с противодавлением

Пусть увлажненная порошковая смесь выдавливается в осесимметричной конической матрице согласно рис. 3.5. Процесс реализуется следующим образом. В исходном положении пуансон противодавления «d» находится у меньшего основания конической части матрицы «a» под давлением  $q$ , величина которого может задаваться. Увлажненная порошковая смесь «c» засыпается в контейнер матрицы, а затем сжимается выдавливающим пуансоном «b». По достижении определенной степени сжатия, заданного значением  $q$ , начинается процесс выдавливания. Задача заключается в определении давления деформирования и анализе условий интенсификации.

Рассмотрим установившийся процесс выдавливания, обозначая полную силу прописной буквой  $P$  с нижним индексом, относящимся к соответствующему участку матрицы, обозначенному цифрой с окружностью на рис. 3.5. Строчной буквой  $P$  с нижним индексом будем обозначать давление на каждом участке матрицы.

Примем следующие допущения для решения этой задачи: 1. На боковых участках матрицы касательное контактное напряжение, вызываемое трением, равно максимальному касательному напряжению основного материала порошка (квазианалог закона Зибеля). 2. Смещение материала прессовки происходит вдоль радиусов конического участка матрицы (рис. 3.6). 3. Радиальное перемещение слабо зависит от угла  $\varphi$  (рис. 3.6) на верхней границе конического участка матрицы.

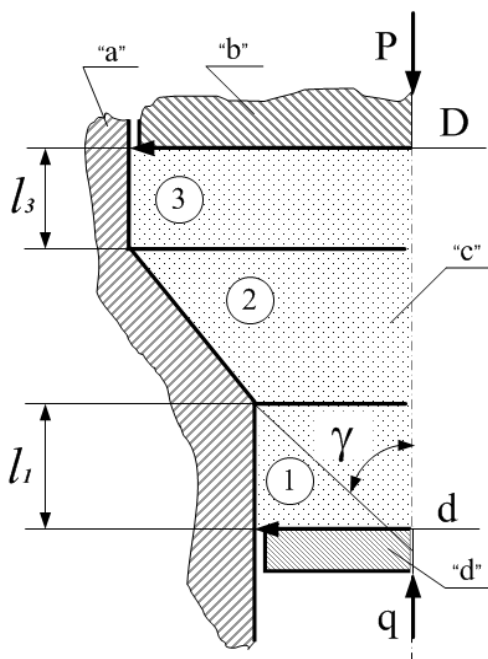


Рис. 3.5. Схема выдавливания с противодавлением

Выходной участок 3 матрицы. В выходном участке матрицы радиальное напряжение с учетом наложения противодействия может быть значительным, однако, напряжение трения или среза не может превышать величины максимального касательного напряжения  $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ . Сопротивление движению порошковой смеси, в соответствии с первым допущением, будет создаваться контактным трением формируемого материала по стенке участка 3 матрицы и противодействием  $q$ :

$$P_1 = k\pi dl_1 + q \frac{\pi d^2}{4}, \quad (3.117)$$

где  $d$ ,  $l_1$  – диаметр и длина выходного участка матрицы;  $q$  – величина противодействия.

Очевидно, величина давления сопротивления на выходном участке матрицы будет задаваться соотношением:

$$P_1 = \frac{4kl_1}{d} + q. \quad (3.118)$$

Конический участок 2 матрицы. Участок 2 будем рассматривать в сферической системе координат (см. рис. 3.6). В качестве сферических координат будем использовать координаты  $\rho$  (изменяется от  $a$  до  $b$ ),  $\varphi$  (изменяется от 0 до  $\gamma$  с учетом симметрии),  $\theta$  (изменяется от 0 до  $2\pi$ ). От угла  $\theta$  зависимость параметров процесса отсутствует ввиду осевой симметрии. Верхняя и нижняя границы представляются поверхностями шаровых сегментов.

Давление на нижней границе задается значением давления  $P_1$ , а давление  $P_2$  на втором участке является искомым и относится к поверхности с радиусом кривизны  $b$ .

Для вычисления давления на основном пуансоне будем использовать метод баланса работ, для реализации вычислительных процедур которого требуется предварительное определение деформации и перемещений. Так как в любой точке шарового сегмента кривизна поверхности в направлениях  $\theta$  и  $\varphi$  одинакова, перемещения в окружном направлении и в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору, будут отсутствовать:

$$U_\theta = U_\varphi = 0, \quad (3.119)$$

где  $U_\theta$ ,  $U_\varphi$  – перемещения в направлении соответствующих координат.

Считая  $U_\rho$  главным перемещением, две компоненты деформаций можно определить следующим образом:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_\rho}{\rho}, \quad (3.120)$$

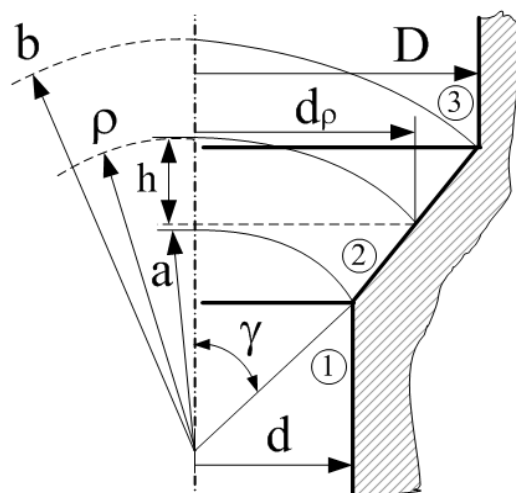


Рис. 3.6. Геометрические параметры конического участка матрицы

где  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$  – радиальная и окружная деформация соответственно;  $\rho$  – текущая координата.

Введем величину относительного изменения объема:

$$\zeta = \frac{dV - dV_0}{dV_0},$$

где  $dV_0$ ,  $dV$  – абсолютные значения приращения объема в начальном и текущем положении.

Тогда сжимаемость материала можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = \zeta. \quad (3.121)$$

Учитывая, что  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$  в силу одинаковой кривизны поверхности шарового сегмента в направлении координат  $\theta$  и  $\varphi$ , из формулы (3.121) получаем:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\zeta - \varepsilon_\rho).$$

С другой стороны, используя соотношения (3.120) и условие (3.121), получим:

$$\frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} + 2 \frac{U_\rho}{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(U_\rho \rho^2) = \zeta.$$

При развитых пластических деформациях в условиях значительного сжатия ( $q > 700$  МПа)  $\zeta \approx 0$ . Тогда интегрирование последнего уравнения дает:

$$U_\rho \rho^2 = C(\varphi), \quad (3.122)$$

где  $C(\varphi)$  – некоторая функция интегрирования.

С учетом третьего допущения из решения (3.122) имеем:

$$U_\rho \rho^2 = C(\varphi) = (U_\rho)^b b^2, \quad (3.123)$$

где  $(U_\rho)^b$  – радиальное перемещение на верхней границе второго участка.

Из соотношения (3.123) получаем:

$$U_\rho = \frac{(U_\rho)^b b^2}{\rho^2}. \quad (3.124)$$

С использованием соотношения (3.120) и определения (3.124) получаем:

$$\varepsilon_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial \rho} = -2 \frac{(U_\rho)^b b^2}{\rho^3}. \quad (3.125)$$

Найдем интенсивность деформаций, используя ее определение:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\rho - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2}.$$

Откуда, с учетом (3.122) имеем:

$$\varepsilon_i = \pm \varepsilon_\rho. \quad (3.126)$$

С учетом знака деформации из (3.126) и (3.125) получаем следующую зависимость:

$$\varepsilon_i = 2 \frac{(U_\rho)^b b^2}{\rho^3}. \quad (3.127)$$

Уравнение баланса работ для второго участка имеет следующий вид:

$$A_2 = P_2 (U_\rho)^b = A_d + A_f + A_1, \quad (3.128)$$

где  $A_2$  и  $P_2$  – работа и сила соответственно на втором участке;  $A_d$  – работа деформирования;  $A_f$  – работа сил трения;  $A_1$  – работа сил сопротивления со стороны первого участка.

Работа деформирования представлена следующей формулой:

$$A_d = \iiint_{(V)} \sigma_s \varepsilon_i dV, \quad (3.129)$$

где  $dV$  – элемент объема шарового сегмента, который определяется соотношением:

$$dV = 2\pi\rho h \cdot d\rho, \quad (3.130)$$

где  $h$  – высота шарового сегмента, которая определяется из геометрических соотношений рис. 3.6:

$$h = \rho(1 - \cos \gamma), \quad (3.131)$$

где  $\gamma$  – угол образующей конической поверхности второго участка.

Интегрирование правой части формулы (3.129), с учетом соотношений (3.127), (3.130) и (3.131), приводит к следующему результату:

$$A_d = -LM \ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad (3.132)$$

где для  $L$  и  $M$  приняты следующие обозначения:

$$L = 2\pi\sigma_s(1 - \cos \gamma); \quad M = -2(U_\rho)^b b^2. \quad (3.133)$$

Работа сил трения вычисляется по нижеприведенной формуле:

$$A_f = \iint_{(A)} kU_\rho \cdot dA, \quad (3.134)$$

где  $dA = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$ .

Подстановка перемещения из формулы (3.124) в правую часть формулы (3.134) и последующее интегрирование дают:

$$A_f = Z(U_\rho)^b b^2, \quad (3.135)$$

где для величины  $Z$  принято обозначение:

$$Z = 2\pi k \sin \gamma. \quad (3.136)$$

Работа сил сопротивления со стороны первого участка дается следующим соотношением:

$$A_1 = P_1 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{(U_\rho)^b b^2}{a^2}. \quad (3.137)$$

Подстановка значений частных работ из формул (3.132), (3.135) и (3.137) в соотношение (3.128) приводит к следующему результату:

$$P_2(U_\rho)^b = ((Z + 2L)b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + P_1 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2})(U_\rho)^b. \quad (3.138)$$

Выполняя сокращение обеих частей на величину радиального смещения на верхней границе второго участка, получим:

$$P_2 = ((Z + 2L)b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + P_1 \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2}). \quad (3.139)$$

Из геометрических соотношений рис. 3.6 следует:

$$bd = aD; \quad b^2 = \frac{D^2}{4 \sin^2 \gamma} = \frac{D^2}{4(1 - \cos^2 \gamma)}. \quad (3.140)$$

Подставляя соотношения (3.140) в формулу (3.139) и производя преобразования после деления (3.139) на площадь поперечного сечения контейнера, получим давление деформирования на втором участке в следующем виде:

$$p_2 = \sigma_s \cdot (4 \cdot \ln(\frac{D}{d}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma}) + \frac{4l_1}{\sqrt{3}d} + \frac{q}{\sigma_s}). \quad (3.141)$$

При значительном давлении  $q$  силу трения на третьем участке (контейнер) можно подсчитать по формуле:

$$p_f = k \cdot \pi \cdot D \cdot l_3,$$

откуда давление от действия сил трения в контейнере может быть представлено в виде:

$$P_f = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_s \frac{l_3}{D}, \quad (3.142)$$

где  $l_3$  – глубина контейнера.

Сложение (3.142) и (3.141) позволяет получить суммарное давление на основном пуансоне:

$$p = \sigma_s \cdot (4 \cdot \ln(\frac{D}{d}) \cdot (\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sin \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma}) + \frac{4l_1}{\sqrt{3}d} + \frac{4l_3}{\sqrt{3}D} + \frac{q}{\sigma_s}). \quad (3.143)$$

В формулу (3.143) не входит коэффициент трения в связи с тем, что при наличии силы противодействия контактное касательное напряжение принималось равным максимальному касательному напряжению. В предельных случаях конструкции матрицы, когда  $d = D$ ,  $\gamma = 0$  формула (3.143) дает неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ ; если же  $d \neq D$ , при  $\gamma = 0$  получаем ступенчатую матрицу, а значение  $P_3$  имеет тенденцию стремления к бесконечности. Этому случаю соответствует замыкание основного пуансона на тело матрицы или на спрессованную смесь в застойной кольцевой зоне.

Значение составляющей давления на выдавливающем пуансоне для компенсации заданного противодействия составляет:

$$P_q = q(\frac{d}{D})^2. \quad (3.144)$$

Формула (3.144) относится к преодолению сил трения, таким образом:

$$(P_q)^0 = \frac{4}{\sqrt{3}} (\frac{l_3}{D} + \frac{l_1}{d}) \sigma_s. \quad (3.145)$$

Входящие в данную формулу величины  $l_1$ ,  $l_3$ , вообще говоря, связаны между собой. Представляет интерес исследование изменения  $P_f$  по мере движения выдавливающего пуансона или же пуансона противодействия. С этой целью рассмотрим изменение сил трения при движении выдавливающего пуансона на величину  $dz$ , а пуансона противодействия – на величину  $dh$ . При этом полную силу преодоления трения можно представить в следующем виде:

$$P_f = k\pi(Dz + dh), \quad (3.146)$$

где  $z$  – высота части прессовки в контейнере;  $h$  – высота части прессовки на выходном участке матрицы.

Возьмем дифференциал от  $P_f$ :

$$dP_f = k\pi(D \cdot dz + d \cdot dh). \quad (3.147)$$

С учетом очевидного соотношения  $dz = -(d^2/D^2)dh$  представим соотношение (3.147) в виде:

$$dP_f = k\pi d(1 - \frac{d}{D}) \cdot dh. \quad (3.148)$$

Интегрирование уравнения (3.148) дает:

$$P_f = k\pi d(1 - \frac{d}{D}) \cdot dh + C, \quad (3.149)$$

где  $C$  – константа интегрирования.

Пусть в некоторый момент, когда выполняется условие (3.145), высота части прессовки в контейнере равна  $z_0$ , а на третьем участке –  $h = 0$ . В этом случае при начале движения пуансона сила трения будет иметь место только в контейнере, что позволяет сформулировать граничное условие для уравнения (3.148):

$$P_f(0) = k\pi D z_0. \quad (3.150)$$

Из формул (3.148) и (3.150) получим  $C = k\pi D z_0$  и подставим его в решение (3.149):

$$P_f(h) = k\pi(D z_0 + d(1 - \frac{d}{D})h). \quad (3.151)$$

Давление на выдавливающем пуансоне от действия сил трения представляется таким образом:

$$P_f(h) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s (\frac{z_0}{D} - \frac{d}{D^2}(1 - \frac{d}{D})h). \quad (3.152)$$

Из формулы (3.152) видно, что сила трения является линейной функцией высоты прессовки в выходном участке матрицы. К моменту завершения цикла выдавливания

$$h_k = (D_2/d_2) z_0. \quad (3.153)$$

Подставляя это значение в (3.152), получаем:

$$(P_f)^{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \frac{z_0}{d}. \quad (3.154)$$

Производя замену  $(P_q)^0$ , определенного зависимостью (3.144), значением  $P_f$  из (3.152), преобразуем формулу давления на выдавливающем пуансоне (3.143) в функцию величины  $h$ :

$$P(h) = \sigma_s (4 \ln(\frac{D}{d}) (\frac{1}{\sqrt{3} \sin \gamma} + \frac{1}{1 + \cos \gamma}) + \frac{2}{\sqrt{3}} (\frac{z_0}{D} + \frac{d}{D^2}(1 - \frac{d}{D})h) + \frac{q}{\sigma_s}). \quad (3.155)$$

Очевидно, максимум функции (3.155) будет достигаться на границе области изменения параметра  $h$ , определенного условием (3.153).

**Выводы:** рассчитанные модели лежат в основе инженерных методов расчета ряда технологических задач ОМД, в частности осадки, волочения, прокатки и выдавливания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебное пособие позволит будущим инженерам освоить методы математического моделирования процессов обработки металлов давлением, поставить соответствующую краевую задачу, сформулировать начальные и граничные условия, выбрать наиболее эффективный метод решения.

Решение краевой задачи дает возможность определять в области пластического течения распределение скоростей, деформаций, температур, напряжений, использование ресурса пластичности.

В связи с этим появляется возможность анализа условий заполнения профиля в процессах пластического формоизменения.

Появляется возможность оптимизации процесса с точки зрения энергосиловых затрат, стойкости инструмента, расхода металла, качества получаемых изделий.

Эти знания необходимы для анализа существующих процессов обработки металлов давлением с целью их совершенствования и оптимизации, а также для разработки новых высокоэффективных ресурсосберегающих технологий.

Исследование энергетического метода расчета процессов ОМД позволит студенту более осмысленно подойти к улучшению технологических учебных дисциплин, таких как «Технология горячей объемнойковки и штамповки», «Технология листовой штамповки», «Технология холодной объемной штамповки».

Материал, рассмотренный в данном учебном пособии, может быть использован для анализа процессов нагружения в пластической зоне при выполнении расчета в курсовом и дипломном проектировании.



## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая задача называется плоской?
2. Приведите примеры задач формообразования, сводящиеся к плоским задачам.
3. Изобразите расположение напряжений на выделенном кубике в случае плоской задачи.
4. Какие касательные напряжения равны нулю, если напряжения не зависят от координаты  $x_1, x_2$ ?
5. Объясните различие между плоским напряжением и плоским деформированным состоянием. Чему равны напряжения и деформации вдоль характерной оси в том и другом случае?
6. Сформулируйте постановку задачи определения нормального и касательного напряжений на произвольной площадке.
7. Изобразите расположение компонент напряжений в плоской задаче.
8. Запишите соотношение между компонентами направляющего вектора в плоской задаче.
9. Из каких соотношений и как определяется нормальная составляющая вектора напряжений для плоской задачи?
10. Произведите вычисление касательной составляющей вектора для плоской задачи.
11. При каких значениях угла касательная составляющая вектора напряжений максимальна? Сравните с октаэдрическими касательными напряжениями.
12. Дайте обоснование и сделайте переход от тензора напряжений объемной задачи к тензору напряжений плоской задачи.
13. Какое уравнение является сходным для определения главных напряжений плоской задачи? Запишите его через определитель и в алгебраической форме.
14. Напишите выражения главных напряжений через компоненты исходного тензора напряжений.
15. Изобразите схему для иллюстрации перехода от главных напряжений к напряжениям в произвольной системе координат.
16. Дайте алгоритм такого перехода.
17. Произведите вычисление нормальной составляющей вектора напряжений для условия плоской задачи.
18. Произведите вычисление  $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$  через главные напряжения и угол.
19. Изобразите диаграмму Мора для плоской задачи.
20. Запишите уравнение окружности с использованием среднего и максимального касательных напряжений для плоской задачи.
21. Докажите, что внутренний угол круга Мора вдвое больше угла наклона оси при переходе к исходным значениям напряжений для плоской задачи.
22. Можно ли доказать сугубо геометрическим способом соотношение углов для плоской задачи?

23. Дайте аналитический вывод значений компонент направляющего вектора, если заданы главные напряжения, нормальная и касательная составляющие вектора напряжений.
24. К какой задаче приводит операция растяжения плоского листа во взаимно перпендикулярных направлениях нормально к торцам? Сделайте эскиз, изобразите напряжения.
25. Как будут располагаться главные напряжения по поперечному сечению гидроцилиндра под действием давления масла? Сделайте эскиз.
26. Изобразите и назовите шесть наиболее применяемых моделей деформированного твердого тела.
27. Каковы экспериментальные предпосылки для формулировки условия пластичности?
28. Запишите условие Губера–Мизеса для идеального пластичного тела.
29. Какие аналитические функции наиболее часто применяются для описания упрочнения? К каким проблемам это приводит при аналитическом решении задач?
30. Дайте вывод условия пластичности Мизеса–Губера.
31. Какое условие пластичности было сформулировано Сен-Венаном?
32. Какое из известных условий пластичности является более точным?
33. Дайте формулу баланса работ без учета потерь.
34. Приведите формулы вычисления полной работы деформирования через тензоры.
35. Как определяют удельную работу, идущую на всестороннее сжатие или растяжение?
36. Запишите тензоры напряжений и деформаций в терминах главных величин.
37. Вычислите удельную работу формообразования для формулирования энергетического условия пластичности.
38. Сделайте вывод условия пластичности для плоского напряженного состояния.
39. Выведите условие пластичности для плоского деформированного состояния.
40. Из какого условия можно получить значения коэффициента Пуассона для пластической области?
41. К какому соотношению приводит условие пластичности для плоской деформации с учетом введения модифицированного предела текучести?
42. Изобразите главные напряжения на диаграмме Мора и покажите максимальное значение касательного напряжения. Как соотносятся данные диаграммы с условием Треска?
43. К какой форме условия пластичности приводит рассмотрение случаев равенства двух главных напряжений (выполнить выкладки)?
44. Каковы преимущества и недостатки упрощенного условия пластичности?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Филимонов, В. И. Теория обработки металлов давлением / В. И. Филимонов : учеб. пособ. – Ульяновск : УлГТУ, 2004. – 206 с.
2. Кокорин, В. Н. Моделирование процесса уплотнения увлажненных порошков при значительных давлениях / В. Н. Кокорин, В. И. Филимонов // Заготовительные производства в машиностроении. – 2008. – № 11. – С. 35–37.
3. Кокорин, В. Н. Научные основы интенсификации уплотнения металлических порошков / В. Н. Кокорин, В. И. Филимонов, Е. М. Булыжев. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 217 с.
4. Кокорин, В. Н. Теория и практика прессования гетерофазных увлажненных механических смесей на основе железа / В. Н. Кокорин, А. И. Рудской, В. И. Филимонов, Е. М. Булыжев, С. Ю. Кондратьев. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 236 с.

Учебное электронное издание

КОКОРИН Валерий Николаевич  
ГРИГОРЬЕВ Андрей Анатольевич  
ФИЛИМОНОВ Вячеслав Иванович  
СИЗОВ Николай Александрович  
КОКОРИН Алексей Валерьевич

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ КОМПАКТНЫХ И ПОРОШКОВЫХ ТЕЛ**

Учебное пособие

Редактор М.В. Теленкова

Усл. печ. л. 21,62.  
Объем данных 0,84 Мб. ЭИ № 54.

Печатное издание

ЛР № 026040 от 22.10.97.  
Подписано в печать 24.12.2012. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 3,95. Тираж 100 экз. Заказ 161.

Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, 32.

Тел.: (8422) 778-113.

Е-mail: [venec@ulstu.ru](mailto:venec@ulstu.ru)

<http://www.venec.ulstu.ru>