МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил

Методические указания

Составитель А. Н. Черный

Ульяновск
2010

УДК 624.04 (076)
ББК 38.112 я7
Р 24

Рецензент профессор, д. т. н., заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» строительного факультета Ульяновского государственного технического университета В. К. Манжосов

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

Р 24 **Расчет** статически неопределимой плоской рамы методом сил : методические указания / сост. А. Н. Черный. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 18 с.

Указания составлены в соответствии с программой курса «Строительная механика» и предназначены для студентов строительных специальностей.

Приведенный материал может быть использован для выполнения студентами соответствующей расчетно-графической работы, а также инженерами, работающими в области расчета стержневых систем.

Работа подготовлена на кафедре «ТиПМ».

УДК 624.04 (076)

ББК 38.112 я7

© Черный А. Н., составление, 2010

© Оформление. УлГТУ, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА

1.1. Кинематический анализ

Стержневая система называется статически неопределимой в том случае, если уравнений статики недостаточно для определения реакций опор и внутренних силовых факторов во всех стержнях системы.

Степенью или числом статической неопределимости стержневой системы называется количество «лишних» кинематических связей или разность между числом всех связей (число неизвестных) и числом уравнений статики.

Минимальное число кинематических связей, при котором достигается геометрическая неизменяемость системы, является необходимым числом связей. Для плоской задачи необходимое число связей равно трем, что соответствует числу уравнений статики. Связи, наложенные сверх необходимого числа, являются «лишними». Различают внешние и внутренние кинематические связи. Для задачи только с внешними кинематическими связями (рис. 1.1, а, б), которые могут быть наложены только опорными стержнями и шарнирами, число «лишних» связей в раме можно определить по формуле

$$Л = C_0 + 2Ш - 3Д, \qquad (1.1)$$

где $Л$ – число «лишних» связей;

C_0 – число опорных стержней;

$Ш$ – число простых шарниров;

$Д$ – число дисков.

При наличии шарниров для определения числа дисков можно пользоваться формулой

$$Д = Ш+1.$$

В замкнутых контурах стержневых систем (рис. 1.1, б), имеют место внутренние кинематические связи, т. е. ограничения, наложенные на взаимное смещение стержней. «Жесткий» контур имеет три кинематические связи, контур с шарниром – две, а контур с элементом фермы (затяжка) – одну кинематическую связь.

1.2. Построение основной системы

Основной системой (*ОС*) называется такая стержневая система, которая статически определимая, геометрически неизменяемая и эквивалентная заданной (*ЗС*). Действие отброшенных «лишних» связей заменяется соответствующими силами и моментами и, следовательно, к основной системе, кроме заданной нагрузки, прикладываются неизвестные силы, число которых равно числу отброшенных связей.

Далее необходимо сформировать уравнения неразрывности деформаций (отсутствия перемещений) метода сил.

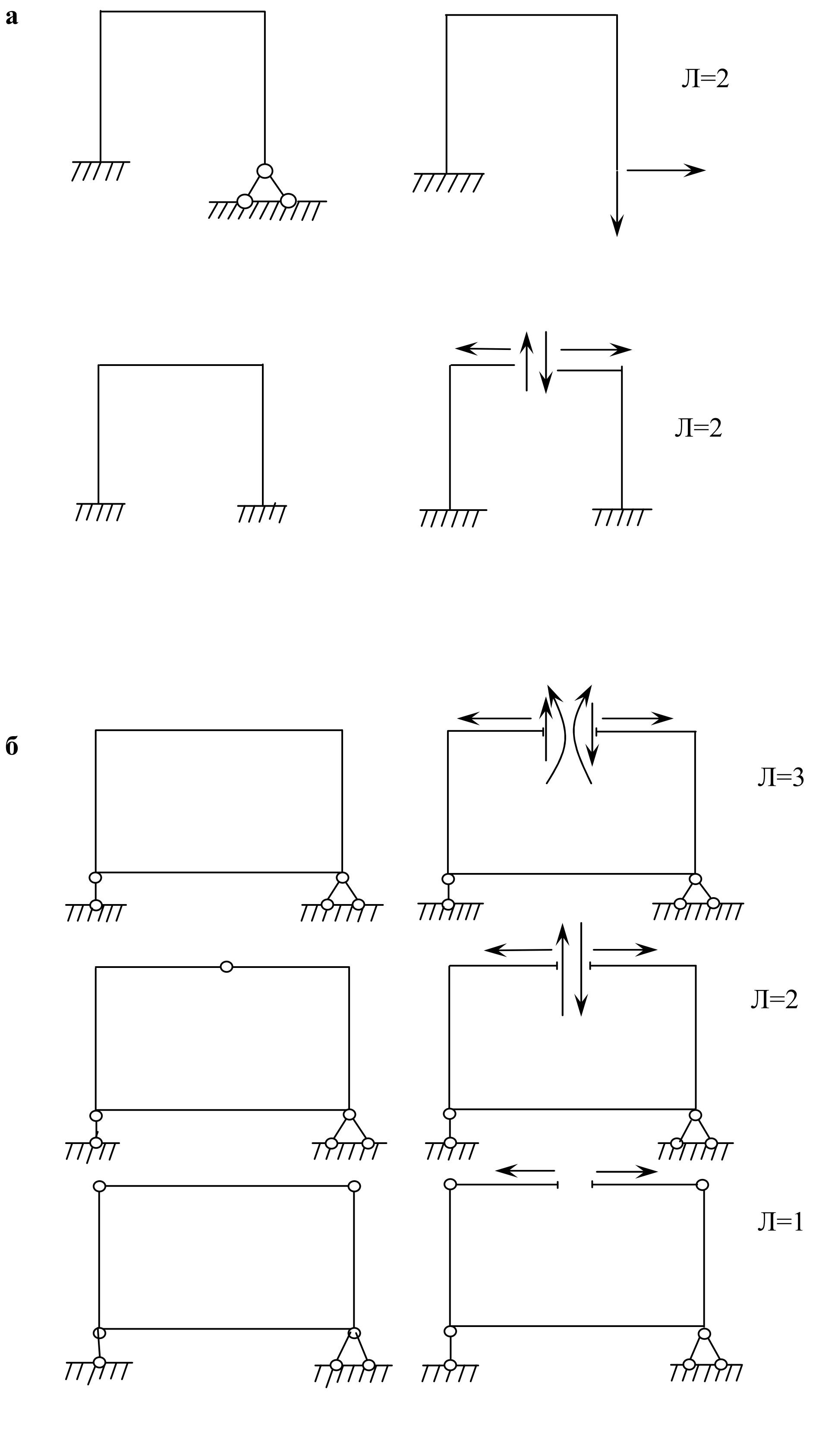


Рис. 1.1. Примеры кинематического анализа
а – рамы с внешними кинематическими связями;
б – рамы с внутренними кинематическими связями

Неизвестные силы должны быть такими, чтобы в основной системе перемещения точек приложения этих сил равнялись нулю (при внешних кинематических связях) и отсутствовало взаимное смещение сечений по одну и другую сторону от разреза (при внутренних кинематических связях).

Система уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений и носит стандартный характер для процедуры метода сил. Так, для задачи n раз статически неопределимой, согласно линейной связи между нагрузкой и деформацией и принципа независимости действия сил, система уравнений будет:

$$\begin{gathered} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1p} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{np} = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $x_1 \div x_n$ – искомые силы;

$\delta_{11} \div \delta_{шш}$ – единичные перемещения от действия «лишних» связей, равных безразмерной единице;

$\Delta_{1p} \div \Delta_{nn}$ – перемещение от заданной нагрузки.

Перемещения в системе уравнений имеют два индекса. Первый индекс указывает направление перемещения, а второй – силу, вызывающую это перемещение:

δ_{11} – перемещение от силы $\bar{x}_1 = 1$, приложенной в том же направлении,

δ_{23} – перемещение от силы $\bar{x}_3 = 1$ по направлению силы x_2,

Δ_{2p} – перемещение от заданной нагрузки по направлению силы x_2.

Очевидно, единичные перемещения можно трактовать как соответствующие податливости основной системы. Так, δ_{11} – податливость основной системы от действия силы x_1 по ее направлению.

По теореме о взаимности перемещений единичные перемещения с одинаковыми индексами (побочные перемещения) равны, т. е.

$$\delta_{12} = \delta_{21},\ \delta_{13} = \delta_{31},\ \ldots,\ \delta_{1n} = \delta_{n1}.$$

Таким образом, дальнейший расчет заданной расчетной схемы задачи заменяется расчетом выбранной ее основной системы, эквивалентность которой обоснована выше.

Очевидно, для каждой задачи возможны различные варианты основной системы, которые не влияют на результат расчета. Однако выбор симметричной основной системы позволяет получить побочные перемещения, равные нулю, что значительно уменьшает трудоемкость решения системы уравнений.

В задачах, представленных на рис. 1.2, значительное число побочных перемещений, полученных в результате «перемножения» симметричных и кососимметричных вспомогательных эпюр изгибающих моментов от единичных сил, обращается в ноль.

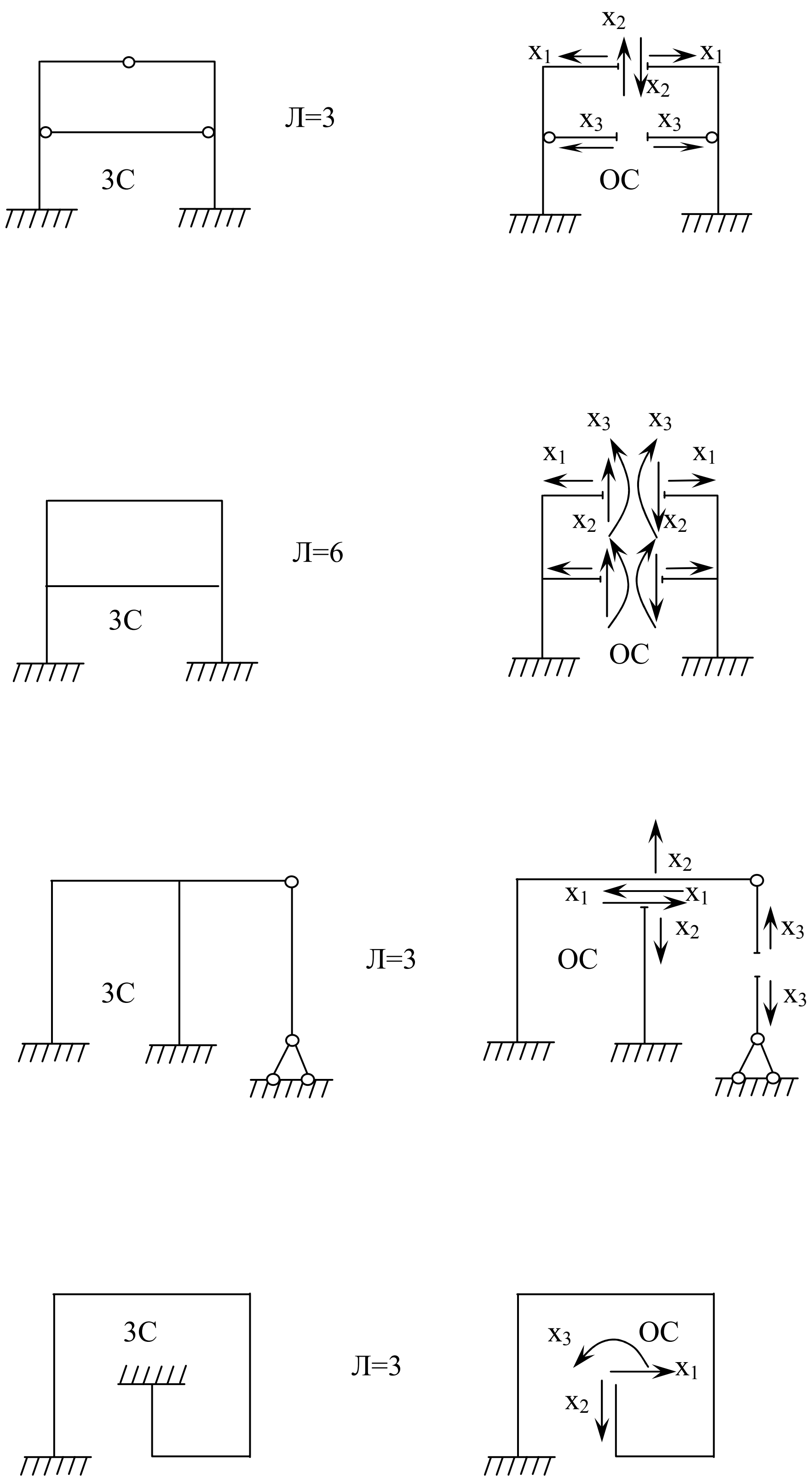


Рис. 1.2. Примеры заданных и основных систем рам

1.3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов

На третьем этапе решения задачи, прежде всего, необходимо определиться с единицами измерений длины и силы, которые будут использоваться в расчете. Грузовая эпюра M_p от заданной нагрузки определяет единицы измерений, принятые в расчете.

Число вспомогательных эпюр изгибающих моментов, которые необходимо построить на основной системе, на единицу больше степени статически неопределимости задачи. Единичные эпюры строятся от поочередного действия искомых сил, равных безразмерной единице, по выбранному направлению, а грузовая эпюра – от заданной нагрузки. Построение этих эпюр выполняется на статически определимой системе (*ОС*) и рассматривалось в предыдущих разделах курса. Единицы измерений на единичных эпюрах моментов не ставятся.

1.4. Формирование системы уравнений и ее решение

Чтобы получить систему уравнений (1.2), необходимо вычислить все перемещения, которые входят в уравнение как коэффициенты при неизвестных или как свободные члены. Определение перемещений выполняется вычислением интеграла Мора (влияние продольных и поперечных сил на перемещение незначительно и поэтому не учитывается):

$$\Delta_{ip} = \sum_{1}^{n} \int_{L} \frac{M_P \cdot \overline{M}_I}{EI} dx,$$

где M_P – изгибающий момент от действия внешних сил;

$\overline{M}_I$ – изгибающий момент от действия единичной силы;

EI – жесткость сечения стержня в плоскости изгиба;

L – длина участка;

n – число участков.

За границы участков принимаются сечения, в которых приложена нагрузка, происходит изменение направления оси стержня (узлы), а также изменение жесткости сечения.

В тех случаях, когда рама имеет прямолинейные участки с постоянной жесткостью, вычисление интеграла Мора можно выполнить с помощью формулы Верещагина – «перемножения» эпюр:

$$\Delta_{ip} = \sum_{1}^{n} \frac{F_{mp} \cdot Y_{mi}}{EI}, \tag{1.3}$$

где F_{mp} – площадь эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки M_p;

Y_{mi} – ордината эпюры $\overline{M}_i$, расположенная под центром тяжести эпюры M_p.

Согласно (1.3), правило Верещагина можно сформулировать следующим образом: чтобы «перемножить» эпюры, необходимо площадь одной эпюры умножить на ординату другой, лежащей против центра тяжести первой эпюры, и разделить на жесткость сечения участка при изгибе.

Результат «перемножения» эпюр положительный в том случае, если обе эпюры расположены с одной стороны участка, и отрицательный, если эпюры расположены с разных сторон.

Линейные эпюры обладают свойством коммутативности, т. е. при «перемножении» линейных эпюр можно выбрать наиболее рациональный путь. Так, на участках эпюры с постоянным моментом рекомендуется всегда брать ординату $Y_{mi.}$

Ниже, в таблице 1.1, приведены формулы значений площади и координаты центров тяжести некоторых геометрических фигур, на которые могут быть расслоены различные варианты эпюр.

В качестве примера «перемножения» эпюр и их расслоения (наиболее сложный вариант) определим перемещение Δ_{IP} как результат «перемножения» эпюр M_p и $\overline{M}_i$ (рис. 1.3).

Эпюра M_p расслоена на прямоугольник, треугольник и фигуру, очерченную квадратной параболой (q = $const$), а $\overline{M}_i$ – на прямоугольник и треугольник.

Умножаем поочередно три площади эпюры M_p на ординаты $\overline{M}_i$ с учетом знака эпюр:

$$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI}(a \cdot l(d - \frac{c+d}{2}) + \frac{(a+b) \cdot l}{2}(-d + \frac{c+d}{3}) +$$

$$+ \frac{2 \cdot ql^2 \cdot l}{3 \cdot 8}(d - \frac{c+d}{2}))\,.$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов системы уравнений (1.2) необходимо «перемножить» по участкам вспомогательные эпюры изгибающих моментов с соответствующими индексами.

Решение системы алгебраических уравнений неразрывности деформаций метода сил рекомендуется выполнять методом исключений Гаусса. В результате решения уравнений определяются искомые силы.

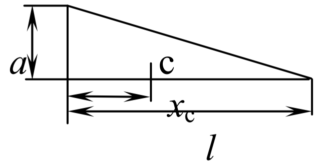
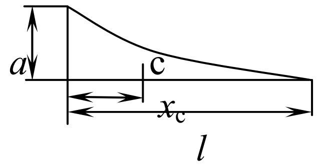
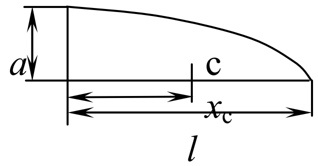
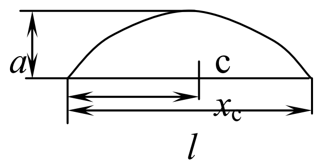
1.5. Построение эпюры изгибающего момента

На основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией можно записать следующее выражение для изгибающего момента:

$$M = \overline{M}_1 x_1 + \overline{M}_2 x_2 + ... + \overline{M}_n x_n + M_p\,, \qquad (1.4)$$

которое позволяет построить эпюру изгибающего момента для основной системы от заданной нагрузки и искомых сил, т. е. для заданной системы задачи от нагрузки, ввиду их эквивалентности.

Таблица 1.1

Геометрические фигуры	Площадь F	Координата x_c
	$\frac{al}{2}$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{al}{3}$	$\frac{1}{4}l$
	$\frac{2al}{3}$	$\frac{3}{8}l$
	$\frac{2al}{3}$	$\frac{l}{2}$

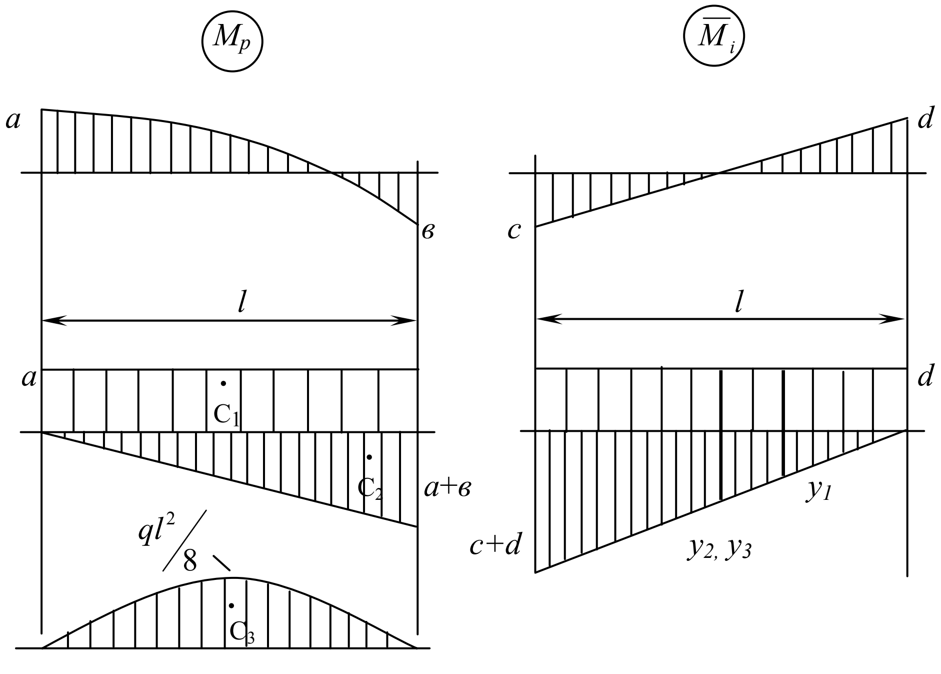


Рис. 1.3. Расслоение вспомогательных эпюр моментов

При построении вспомогательных эпюр изгибающего момента $\overline{M}_1 x_1, \overline{M}_2 x_2, \ldots, \overline{M}_n x_n$, для заданной схемы от действия искомых сил $x_1, x_2, \ldots, x_n$ необходимо увеличить все ординаты соответствующих единичных эпюр $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, …, $\overline{M}_n$ в $x_1, x_2, \ldots, x_n$ раз с учетом их знака.

Согласно (1.4) сложение эпюр выполняется для каждого участка по их границам.

1.6. Построение эпюры поперечной силы

Эпюра поперечной силы строится путем дифференцирования эпюры изгибающего момента.

Дифференцирование эпюры выполняется по участкам. На рис. 1.4 приведены примеры дифференцирования эпюр изгибающего момента и соответствующие эпюры поперечной силы.

На рис. 1.4, а рассмотрены варианты линейного изменения ординат эпюры изгибающего момента на участке длиной l (участок без нагрузки), а на рис. 1.4, б – изменение ординат по квадратной параболе (участок нагружен распределенной нагрузкой q).

Значения поперечной силы на участке слева $Q_л$ и справа $Q_{пр}$ вычисляются по формуле

$$Q_Л = Q_Л^0 + tg\alpha\,,$$
$$Q_{пр} = Q_{пр}^0 + tg\alpha\,, \tag{1.5}$$

где $Q_Л^0$ и $Q_{пр}^0$ – соответственно, значения поперечной силы слева и справа от действия нагрузки на участке;

$tg\alpha$ – тангенс угла наклона линейной составляющей эпюры моментов.

Очевидно, для участков без нагрузки (рис. 1.4, а)

$$Q_Л^0 = Q_{пр}^0 = 0,$$

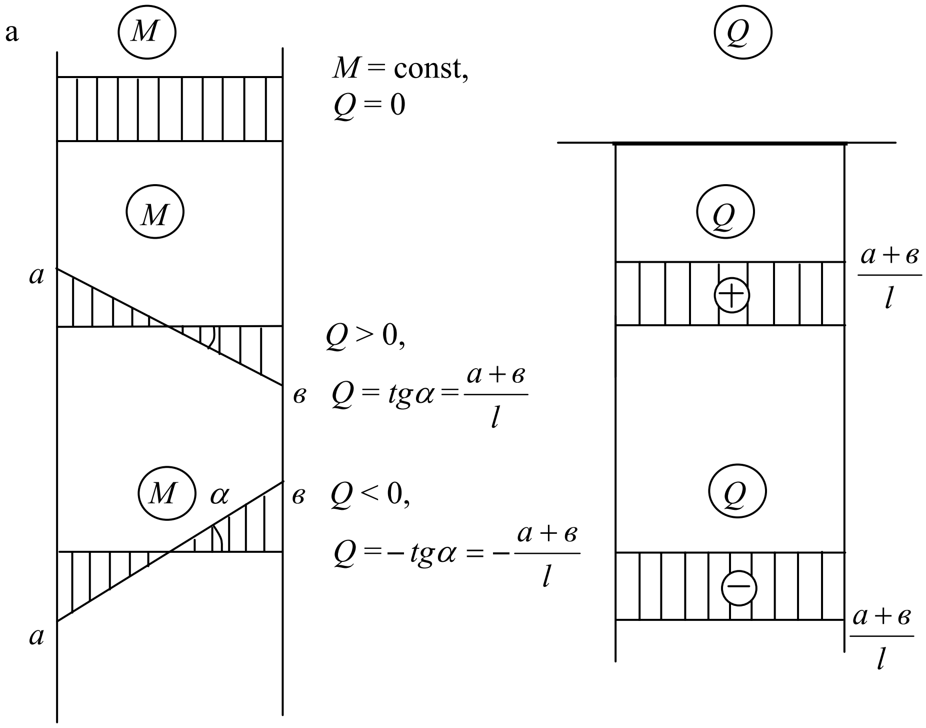
и значение поперечной силы равно $tg\alpha$. Знак поперечной силы определяется по характеру наклона эпюры моментов (см. рис. 1.4). Для участков, нагруженных распределенной нагрузкой q (рис. 1.4, б), эпюра моментов расслаивается на линейную эпюру и эпюру от заданной нагрузки.

На линейной составляющей вычисляется тангенс угла наклона эпюры, а от нагрузки вычисляются реакции (как в двухопорной балке), которые и определяют величину и знак поперечной силы в соответствии с правилом знаков для их построения.

1.7. Построение эпюры продольной силы

Эпюра продольной силы строится по эпюре Q путем поочередного вырезания узлов и составления уравнений равновесия узла:

$$\Sigma X = 0,$$
$$\Sigma Y = 0.$$



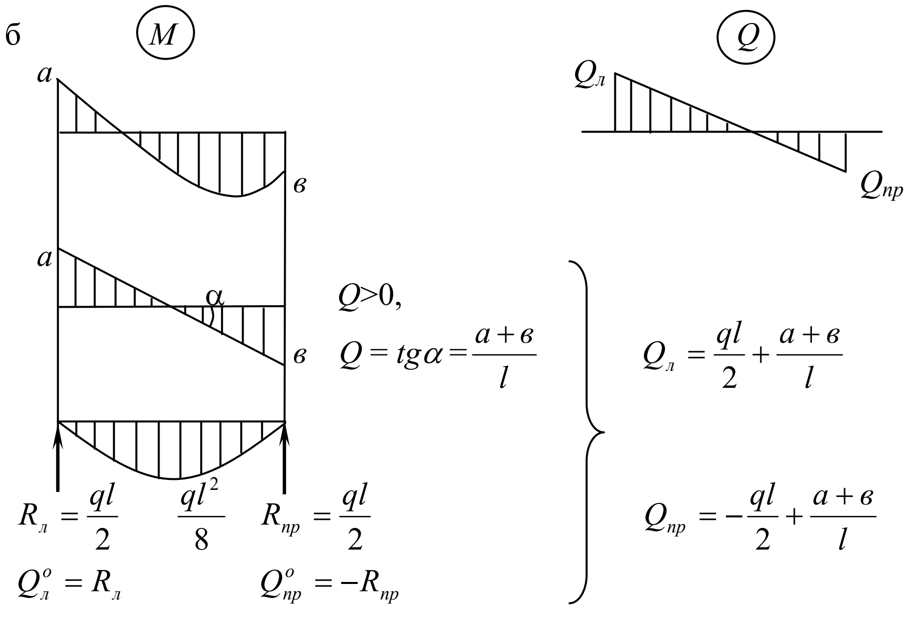


Рис. 1.4. Примеры построения эпюр поперечной силы
а – линейное изменение ординат;
б – изменение ординат по параболе

Поперечные силы, действующие в стержнях узла, уравновешиваются искомыми продольными силами.

1.8. Статическая и кинематическая проверки

Необходимым условием контроля решения задачи являются статическая проверка: равенство нулю суммы нагрузки и реакции опор, т. е. $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$. Реакции опор определяются непосредственно на эпюрах поперечной и продольной сил.

Кинематическая (деформационная) проверка заключается в равенстве нулю перемещений по направлению «лишних» связей и ее рекомендуется выполнять путем «перемножения» эпюры изгибающих моментов на суммарную эпюру от единичных сил, т. е.

$$\Delta = M \cdot \overline{M}_S = 0,$$

где $\overline{M}_S = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + ... + \overline{M}_n$.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной схемы рамы (ЗС) построить эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил методом сил. Выполнить статическую и кинематическую проверки. $EI = const$ (рис. 2.1).

1. Кинематический анализ

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 7 = -3, \quad Л = 3.$$

Задача трижды статически неопределимая.

2. Построение основной системы

Основная система (ОС) образована путем отбрасывания внешних кинематических связей.

Система уравнений неразрывности деформации будет:

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2P} = 0,$$

$$\delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов

Вспомогательные эпюры приведены на рис. 2.1, на котором представлены и реакции опор, необходимые для построения эпюр. При этом эпюры $M_з$ и $M_р$ строятся справа: присоединенный шарнир меняется на эквивалентную шарнирно-неподвижную опору, в которой определяются реакции. Далее, реакции меняются на силы, которые и нагружают левую часть рамы.

Единицы измерений: длина – м, сила – кН.

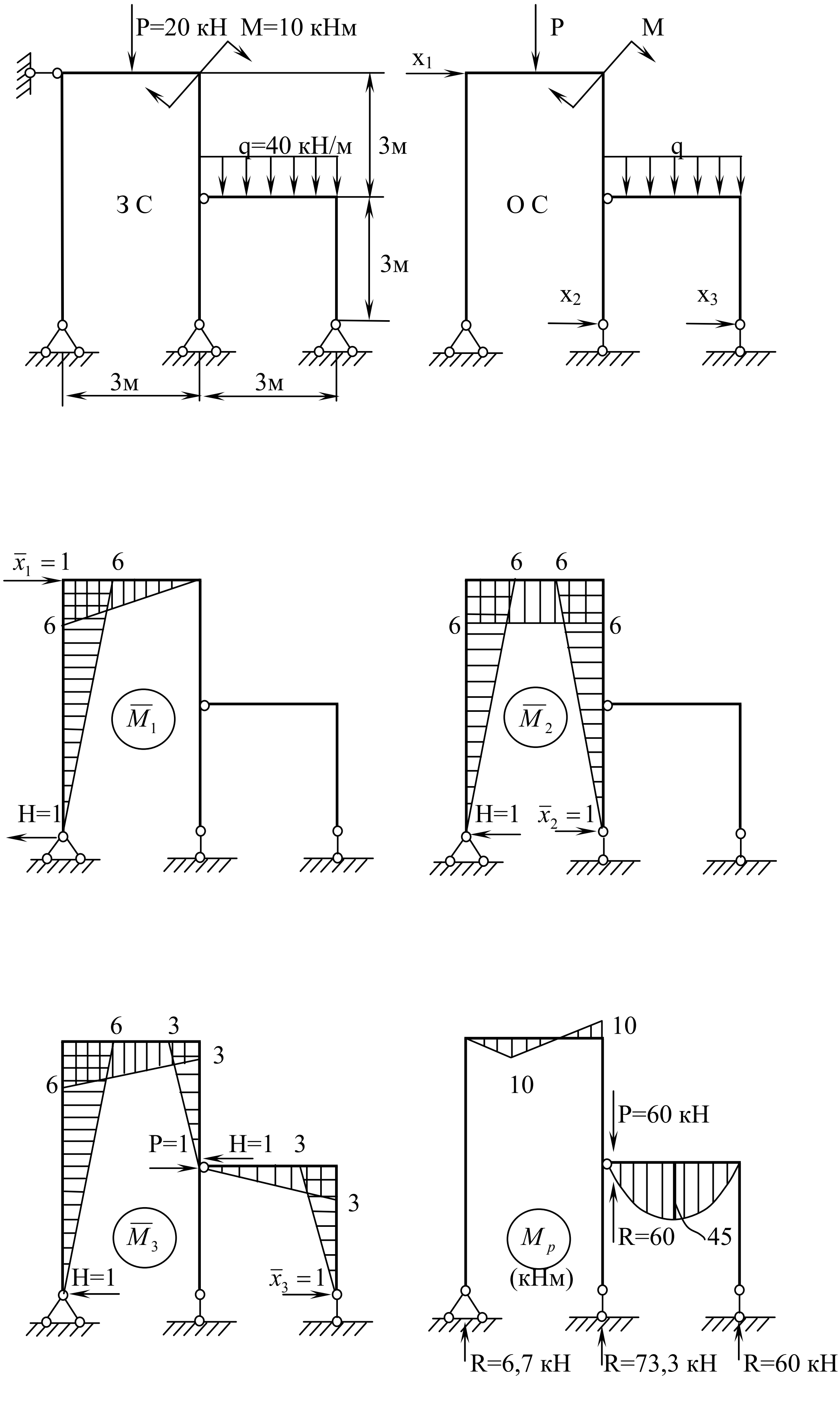


Рис. 2.1. Вспомогательные эпюры изгибающего момента

4. Формирование системы уравнений и ее решение

«Перемножение» вспомогательных эпюр выполнено по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6 + (6\cdot 3/2)(2/3)6) = 108/EI,$$
$$\delta_{12} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6 + (6\cdot 3/2)6) = 126/EI,$$
$$\delta_{22} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6\cdot 2 + 3\cdot 6\cdot 6) = 252/EI,$$
$$\delta_{23} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6 + ((6+3)/2)3\cdot 6 + (3\cdot 3/2)((2/3)3+3)) = 175.5EI,$$
$$\delta_{13} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6 + (6\cdot 3/2)((2/3)3+3)) = 117EI,$$
$$\delta_{33} = 1/EI((6\cdot 6/2)(2/3)6 + (3\cdot 3/2)(2/3)3\cdot 3 + (3\cdot 3/2)((2/3)3+3) +$$
$$+ (3\cdot 3)(3+(1/2)3) = 162/EI,$$
$$\Delta_{1P} = 1/EI((10\cdot 1.5/2)((1/3)3+3) + (0.75\cdot 10/2)((2/3)1.5+1.5) -$$
$$- (0.75\cdot 10/2)((1/3)1.5)) = 37.5/EI,$$
$$\Delta_{2P} = 1/EI(10\cdot 1.5/2)6 = 45/EI,$$
$$\Delta_{3P} = 1/EI((10\cdot 1.5/2)((1/3)1.5+4.5) + (0.75\cdot 10/2)((2/3)\cdot 0.75+3.75)) -$$
$$- (0.75\cdot 10/2)((1/3)\cdot 0.75+3)) = 176.25/EI.$$

Так как жесткость у всех стержней рамы постоянная (EI=const), то, умножая левую и правую части системы уравнений на EI, получим следующую систему линейных уравнений:

$$108\,x_1+126\,x_2+117\,x_3+37.5=0,$$
$$126\,x_1+252\,x_2+175.5\,x_3+45=0,$$
$$117\,x_1+175.5\,x_2+162\,x_3+176.25=0.$$

Решение системы уравнений определяет силы: x_1=3.87 кН, x_2=2.41кН, $x_3 = -6.49$ кН.

Примечание: если жесткость стержней рамы различная, то необходимо выразить жесткости всех участков в зависимости от жесткости одного из участков, например:

EI_1 – жесткость 1-го участка,

EI_2 – жесткость 2-го участка,

EI_3 – жесткость 3-го участка,

кроме этого, дано: $EI_1=2EI_2$, $EI_2=3EI_3$.

Как правило, жесткости участков выражают через меньшую жесткость:

$$EI_1 = EI.$$

Тогда

$$EI_2 = 3EI_3 = 3EI,\ EI_1 = 2EI_2 = 6EI.$$

Очевидно, при формировании системы уравнений все перемещения (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) можно сократить на EI.

5. Построение эпюры изгибающего момента

Эпюра изгибающего момента для заданной схемы рамы построена с использованием зависимости

$$M = \overline{M}_1 x_1 + \overline{M}_2 x_2 + \overline{M}_3 x_3 + M_p.$$

На рис. 2.2 представлены эпюры изгибающего момента.

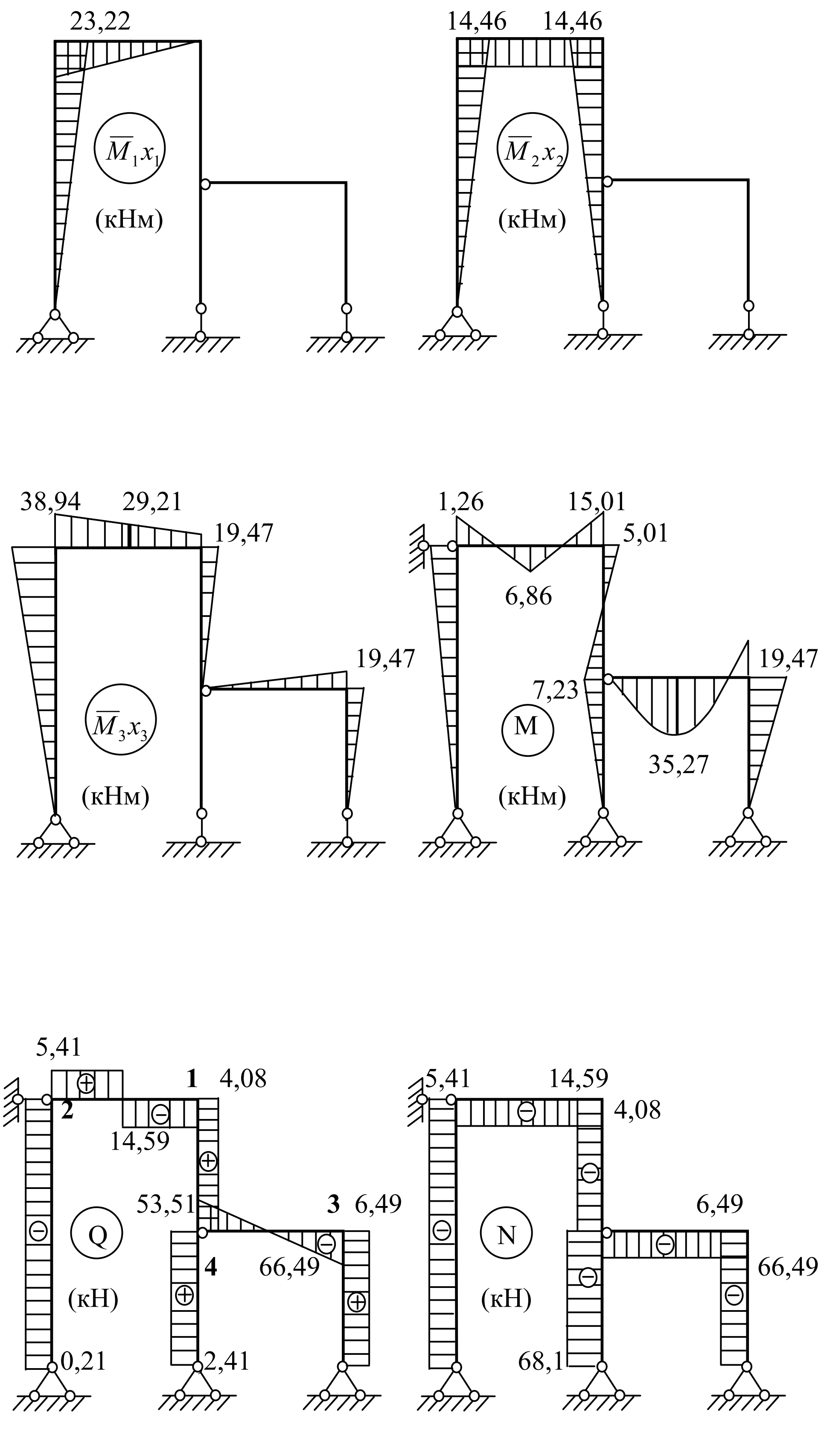


Рис. 2.2. Эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил

6. Построение эпюры поперечной силы

Эпюра поперечной силы построена по эпюре изгибающего момента с использованием формулы (1.5) и приведена на рис. 2.2.

7. Построение эпюры продольной силы

В соответствии с нумерацией узлов рамы на эпюре поперечной силы «вырезаны» узлы (рис. 2.3) и в сечениях приложены действующие поперечные силы. Искомые продольные силы в каждом узле подчеркнуты и определены из уравнений равновесия. По значениям этих сил построена эпюра продольной силы (рис.2.2).

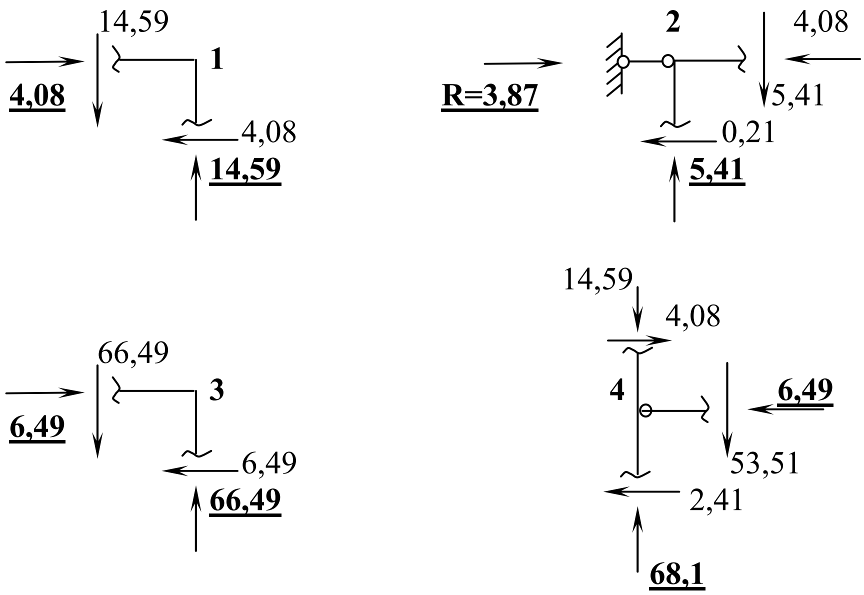


Рис. 2.3. Равновесие узлов рамы

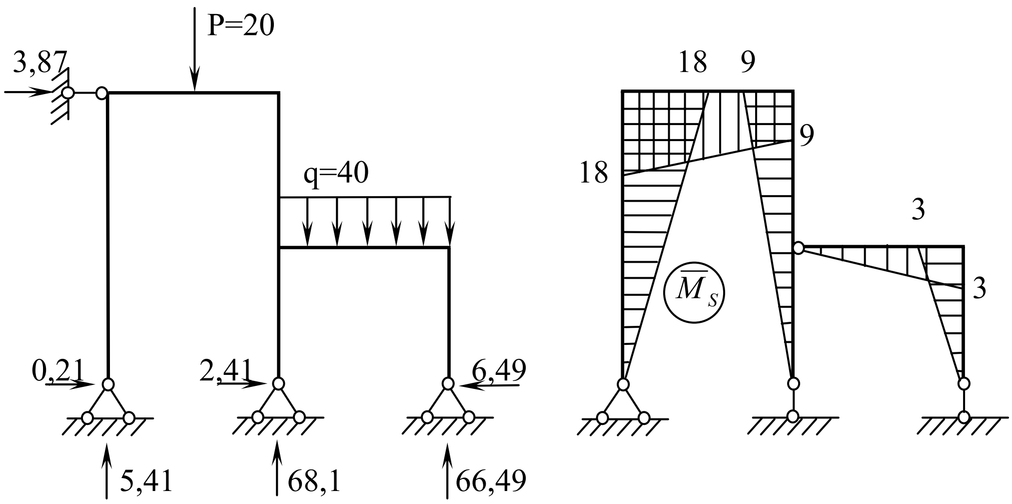


Рис. 2.4. Реакции опор и суммарная эпюра $\overline{M}_S$

8. Статическая и кинематическая проверки

Реакции опор расставляются на эпюрах Q и N или на отдельной схеме рамы (рис. 2.4). Статическая проверка:

$$\Sigma X = 3{,}87+0{,}2+2{,}41–6{,}49 = 0,$$

$$\Sigma Y = 5{,}41+68{,}1+66{,}49–20–120 = 0.$$

Суммарная эпюра единичных сил $\overline{M}_S$ представлена на рис. 2.4. Кинематическая проверка:

$$\begin{aligned}\Delta = M \cdot \overline{M}_S = 1/EI(&-1/2\cdot 6\cdot 18\cdot 2/3\cdot 1.26 + 1.5/6(-2\cdot 18\cdot 1.26 +\\ &+2\cdot 6.86\cdot 13.5 - 1.26\cdot 13.5 + 18\cdot 6.86) + 1.5/6(2\cdot 13.5\cdot 6.86 -\\ &-2\cdot 9\cdot 15.01 - 13.5\cdot 15.01 + 9\cdot 6.86) + 3/6(2\cdot 3\cdot 7.23 - 2\cdot 5.01\cdot\\ &\cdot 9 - 3\cdot 5.01 + 7.23\cdot 9) + 1/2\cdot 3\cdot 3\cdot 2/3\cdot 7.23 - 1/2\cdot 3\cdot 3\cdot 2/3\cdot\\ &\cdot 19.47 + 3/6(-3\cdot 19.47 + 4\cdot 35.27\cdot 1.5)) = -160.23 + 161.58 \approx 0\,.\end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высшая школа, 2000. – 630 с.
2. Манжосов, В. К. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил: методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2003. – 36 с.
3. Снитко, Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высшая школа, 1992. – 486 с.

Учебное издание

Расчет статически неопределимой плоской рамы методом сил

Методические материалы

Составитель ЧЕРНЫЙ Анатолий Николаевич

Редактор М. Штаева

Подписано в печать 26.12.2010. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,16. Тираж 100 экз. Заказ 612.

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.

Типография УлГТУ. 432027, г. Ульяновск, Сев. Венец, 32.