

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
Ульяновский государственный технический университет

**Ю. Е. Кувайскова**

## **Математические модели экономики**

### **Моделирование потребительского спроса**

Методические указания для студентов специальности 23040165

Ульяновск  
2009

УДК 001.891.573 (076)

ББК 22.1 я7

К 88

Рецензент старший преподаватель кафедры  
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит» Л. Г. Лопастейская.

*Одобрено секцией методических пособий научно-методического  
совета университета*

**Кувайскова, Ю. Е.**

К 88      **Математические модели экономики. Моделирование потребительского спроса : методические указания для студентов специальности 23040165 / Ю. Е. Кувайскова. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 28 с.**

Указания составлены в соответствии с учебным планом специальности, содержат необходимые теоретические основы и практические аспекты моделирования потребительского спроса. Приведены методические рекомендации по построению модели потребительского рыночного спроса – максимизация порядковой функции полезности при бюджетном ограничении, представлена взаимная задача, заключающаяся в минимизации затрат, обеспечивающих заданный уровень потребления, рассмотрены примеры решения задач, предложены задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов вузов дневной формы обучения.

Разработаны на кафедре «Прикладная математика и информатика».

**УДК 001.891.573 (076)**

**ББК 22.1 я7**

© Кувайскова Ю. Е., 2009

© Оформление. УлГТУ, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ .....	4
1.1. Функция спроса и рыночное равновесие.....	4
1.1.1. Потребительский спрос и эластичность спроса.....	4
1.1.2. Рыночное равновесие .....	5
1.1.3. Функции Энгеля-Торнквиста .....	6
1.2. Статистические индексы потребления .....	6
1.2.1. Индексы Ласпейреса и Пааше .....	6
1.2.2. Аксиомы Фишера .....	7
1.3. Функция полезности и предпочтения .....	8
1.3.1. Кардинальная полезность .....	8
1.3.2. Замещение в потреблении .....	10
1.4. Оптимизационная модель задачи рационального потребления.....	11
1.4.1. Постановка задачи .....	11
1.4.2. Основное уравнение теории потребления.....	13
2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ .....	15
2.1. Решение задач.....	15
2.2. Самостоятельные упражнения.....	17
2.3. Тестовые задания .....	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	28
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	28

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение спроса на рынке сейчас становится первоочередной задачей при функционировании предприятия. Постоянное отслеживание спроса и способность моментально реагировать на малейшие его изменения (то есть гибкость производства) – все это предопределяет выживание и успешную работу предприятия. Сейчас для любой фирмы важнее даже не произвести какую-либо продукцию, а сбыть ее, найти конкретную нишу на рынке для своего товара. Поэтому-то на первые роли выходят в настоящее время многочисленные отделы маркетинга, непосредственно занимающиеся вопросами сбыта и реализации продукции. И там хорошо знают, что такое спрос, и как он изменяется с течением времени. «Клиент всегда прав» – этот принцип, принятый на вооружение многими ведущими производителями, лишний раз доказывает первостепенное значение такого экономического понятия, как потребительский спрос.

## 1. ТЕОРИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ

### 1.1. Функция спроса и рыночное равновесие

#### 1.1.1. Потребительский спрос и эластичность спроса

В современной экономической теории и количественных методах анализа рынков важнейшую роль играют зависимости объемов возможных продаж некоторого товара или набора товаров от их цен и бюджета потенциальных покупателей. Такие зависимости выявляются на основе статистических исследований и называются *функциями спроса*.

Первым исследователем зависимости «спрос – цена» принято считать О. Курно. Он ограничился одномерным анализом функций спроса  $x = x(p)$ , где  $x$  – объем продаж товара,  $p$  – его цена. В качестве основного «закона спроса» Курно утверждал, что *спрос на любой продукт падает с ростом его цены*.

Английский экономист Р. Гиффен, изучая спрос в Ирландии на картофель, обнаружил обратный эффект, когда с ростом цены картофеля его потребление также росло. Этот эффект был объяснен замещением одного продукта (мяса) другим (картофелем). Эффект парадоксального (относительно общего «закона спроса») возрастания спроса на продукт, вызванного ростом его цены, обнаруженный Р. Гиффеном, был назван *спрос Гиффена*.

Количественной характеристикой влияния фактора (аргумента) на исследуемое явление (функцию) в экономическом анализе является *эластичность*. Это понятие введено А. Маршаллом для анализа зависимости «спрос – цена». Эластичность спроса на товар по его цене означает, на сколько процентов изменится спрос при увеличении цены на 1 %.

Математическое понятие эластичности в предположении дифференцируемости зависимости  $x(p)$  определяется на основе предельного перехода по фактору  $\Delta p \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x(p)}{x(p)} \div \frac{\Delta p}{p} = \frac{p}{x} \frac{dx(p)}{dp}. \quad (1.1)$$

В соответствии с «законом спроса» эластичность товара по его же цене отрицательна. Для товаров с парадоксальным спросом Гиффена она положительна.

Рассмотрим степенную функцию

$$f(x) = ax^\alpha. \quad (1.2)$$

Эластичность степенной функции (1.2) равна показателю степени:

$$\varepsilon = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \alpha. \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Рыночное равновесие

Количественное изучение спроса должно основываться на анализе статистики продаж  $\{p^t, x^t : t \in \overline{0, T}\}$ , где  $p^t$  – цены и  $x^t$  – объемы продаж в моменты времени  $t$ , принимающие целочисленные значения в  $\overline{0, T} \equiv \{0, 1, \dots, T\}$ . При этом необходима стабильность поведения потребителей и уверенность в том, что статистика представляет предполагаемую зависимость  $x(p)$  достаточно надежно. Последнее означает, что объемы продаж  $x^t$  отражают реакцию потребителя на цены  $x(p^t)$ . В идеале (без погрешностей)

$$x^t = x(p^t), \quad t \in \overline{0, T}. \quad (1.4)$$

Важнейшим условием наблюдения пар  $(x^t, p^t)$ , соответствующих предположению (1.4), является бездефицитность рынка, в частности, его *равновесность*. Эти понятия связаны с законом «спроса–предложения», сформулированным А. Маршаллом и представленном на рис. 1.1 («Крест Маршалла»).

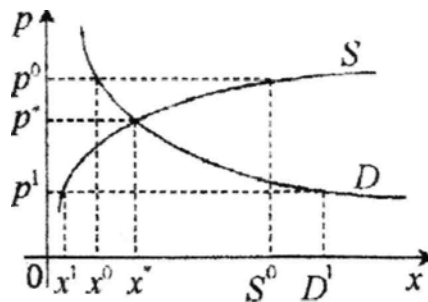


Рис. 1.1. «Крест Маршалла»

Кривая  $D$  (Demand) представляет зависимость «спрос–цена» (в обратной шкале), и кривая  $S$  (Supply) – «предложение–цена». Точка пересечения графиков  $D$  и  $S$   $(x^*, p^*)$  представляет равновесную пару, когда в единицу времени на рынок поступает столько товара  $S(p^*)$ , сколько его за это же время при данной цене  $p^*$  продается, т. е.  $S(p^*) = D(p^*) = x^*$ .

Предположим, что цена рынка  $p^0 > p^*$ . Тогда предполагаемое при этом количество товара  $S^0 = S(p^0)$  реализуется лишь в количестве  $x^0 = D(p^0) < S^0$  и пара  $(p^0, x^0)$  представляет спрос  $x(p) = D(p)$ . Если же цена  $p^1 < p^*$ , то предлагаемое коли-

чество  $S(p^1) < D(p^1) = D^1$ , т. е. рынок дефицитный. При этом будет продано товара в количестве  $x^1 = S(p^1)$  и статистическая пара  $(p^1, x^1)$  кривую спроса  $x(p)$  не представляет.

### 1.1.3. Функции Энгеля-Торнквиста

Приведем три функции, предложенные Л. Торнквистом для моделирования зависимости «спрос–доход» на товары различных типов потребления.

Первая функция

$$x^{(1)}(b) = \frac{\alpha b}{b + \beta}, \quad (1.5)$$

где  $b$  – доход потребителя и  $x^{(1)}(b)$  – уровень потребления продукта  $x$  при данном доходе. Положительные параметры  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от цены товара, которую считаем фиксированной.

Зависимость  $x^{(1)}(b)$  интерпретируют как спрос на «товары первой необходимости», например, дешевые продукты питания.

Вторая функция спроса –

$$x^{(2)}(b) = \begin{cases} 0, & 0 \leq b \leq \gamma \\ \frac{\alpha(b - \gamma)}{b + \beta}, & \gamma < b. \end{cases} \quad (1.6)$$

Эта функция отличается от предыдущей сдвигом своего носителя на величину  $\gamma > 0$ . Для такого спроса предложена интерпретация – спрос на «товары относительной роскоши». Например, дорогие продукты питания.

Третья зависимость –

$$x^{(3)}(b) = \begin{cases} 0, & 0 \leq b \leq \gamma \\ \frac{\alpha(b - \gamma)}{b + \beta} b, & \gamma < b. \end{cases} \quad (1.7)$$

Такой товар можно назвать «предметом роскоши».

## 1.2. Статистические индексы потребления

### 1.2.1. Индексы Ласпейреса и Пааше

Экономика развитой страны производит миллионы элементарных товаров, отличающихся в различной степени по своим потребительским свойствам и имеющим свою цену. Эти товары необходимо объединять в группы по близким свойствам, т. е. агрегировать, приписывая им некоторым образом усреднённые показатели количества и цены.

Обобщенный скалярный показатель многомерного набора цен или количества некоторой группы товаров, элементарных, или уже представляющих агрегаты более низкого уровня называется *экономическим индексом*.

Немецким экономистом Е. Ласпейресом были предложены показатели относительного изменения уровней цен и объемов производства (или потребле-

ния) экономики (всей или её некоторой части), характеризующейся статистикой  $\{x^s, p^s; x^t, p^t\}$  для двух временных состояний  $s < t$ :

$$L_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^s \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}, \quad L_{st}^Q = \frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}. \quad (1.8)$$

Показатель  $L_{st}^P$  называется индексом цен и  $L_{st}^Q$  – индексом объемов.

Первый представляет отношение стоимости начального (базового) набора продуктов  $x^s$  в новых ценах  $\langle p^t, x^s \rangle$  к стоимости этого набора в старых ценах  $\langle p^s, x^s \rangle$ .

Индекс объемов  $L_{st}^Q$  представляет отношение стоимостей нового набора  $x^t$  и старого  $x^s$  в базовых ценах  $p^s$ .

Индексы Ласпейреса (1.8) – это базисно взвешенные показатели изменения цен и количества продуктов.

Другой немецкий экономист М. Пааше предложил аналогичные показатели, но с привязкой стоимостей не к базисному  $s$ , а к текущему периоду  $t$ :

$$P_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^t \rangle}, \quad P_{st}^Q = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^t, x^s \rangle}. \quad (1.9)$$

Индексы цен  $P_{st}^P$  и объемов  $P_{st}^Q$  по Пааше являются текуще взвешенными.

В применении к рыночным (потребительским) ценам, как правило, выполняется соотношение

$$P_{st}^P \leq L_{st}^P. \quad (1.10)$$

Можно сказать, что индекс потребительских цен (ИПЦ) Пааше  $P_{st}^P$  является оптимистическим, а ИПЦ Ласпейреса  $L_{st}^P$  – пессимистическим.

### 1.2.2. Аксиомы Фишера

С целью устранения значительных расхождений и противоречий при индексировании цен и объемов товаров различными способами, американский статистик И. Фишер предложил ряд требований (тестов или аксиом), которым должны удовлетворять индексы цен и объемов товаров. Эти требования основаны на свойствах скалярных показателей элементарных товаров. Ввиду того, что достаточно большая совокупность желаемых свойств индексов может оказаться невыполнимой, среди этих требований выделяются основные (обязательные) и дополнительные (желаемые).

К основным тестам Фишера относят:

1) идентичность:  $I_{ii}^P = I_{ii}^Q = 1$ .

2) пропорциональность: если  $p_i^t = \lambda p_i^s$ ,  $x_i^t = \lambda x_i^s$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , то  $I_{st}^P = \lambda$ ,  $I_{st}^Q = \lambda$ .

Индексы Ласпейреса (1.8) и Пааше (1.9) этим требованиям, очевидно, удовлетворяют.

Дополнительные тесты Фишера:

3) мультипликативность (тест стоимости):  $I_{st}^P I_{st}^Q = \langle p^t, x^t \rangle / \langle p^s, x^s \rangle$ ;

4) обратимость во времени:  $I_{st}^P = 1 / I_{st}^P$ ;

5) транзитивность (цепное свойство):  $I_{rs}^P I_{st}^P = I_{rt}^P$ ;

6) промежуточность (тест среднего):  $\min_i (p_i^t / p_i^s) \leq I_{st}^P \leq \max_i (p_i^t / p_i^s)$ .

Последние три свойства относятся и к индексу количества товаров. Четвертое требование (обратимость во времени), как легко убедиться, является следствием первого и пятого (идентичности и транзитивности). Мультипликативность означает согласованность индексации цен и объемов так, чтобы произведение соответствующих индексов давало индекс стоимости полного набора товаров. Транзитивность необходима при решении вопросов индексации доходов во время инфляции.

*Утверждение 1.* Не существует статистического индекса цен и количества, обладающего свойствами мультипликативности, транзитивности и промежуточности.

*Утверждение 2.* Индексы Ласпейреса и Пааше удовлетворяют тесту среднего.

Простейшие и достаточно удачные производные индексы цен и количества предложены Фишером. Они являются средними геометрическими от индексов Ласпейреса и Пааше:

$$F_{st}^P = \sqrt{L_{st}^P P_{st}^P}, \quad F_{st}^Q = \sqrt{L_{st}^Q P_{st}^Q}. \quad (1.11)$$

### 1.3. Функция полезности и предпочтения

#### 1.3.1. Кардинальная полезность

Авторы теории предельной полезности (Г. Госсен, Л. Вальрас и др.) в своих работах 70-х годов XIX века явно или неявно пользовались понятием *функции полезности*, представляющей количественную меру удовлетворения потребностей при потреблении некоторого продукта или набора продуктов. Они считали продукты безгранично делимыми и измеримыми в непрерывной шкале. Функция субъективной полезности, оцениваемой индивидуальным покупателем, стала основным объектом кардинальной (количественной) теории полезности, исходившей из предполагаемой возможности количественного измерения полезности продуктов потребления.

На первом этапе рассматривались скалярные или аддитивные функции полезности

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i). \quad (1.12)$$

*Предельной полезностью* товара была названа полезность его последней потребляемой единицы. Для дифференцируемых функций  $u(x)$  предельной полезностью товара  $i$  естественно считать частную производную  $\partial u(x) / \partial x_i$ .



Требования к функциям полезности: положительность, непрерывность, дифференцируемость, монотонное неограниченное возрастание функции и убывание ее первых производных, т. е. предельной полезности.

Монотонное возрастание функции многих переменных  $u(x)$  означает, что если  $x' \geq x$ , то  $u(x') \geq u(x)$ . В дифференцируемом случае  $du(x)/dx \geq 0$ .

Монотонное возрастание интерпретируется как *ненасыщаемость спроса*. Свойство убывания предельной полезности называется *первым законом Госсена*. При переходе к общим многомерным функциям  $u(x)$  требование убывания частных производных было усилено требованием строгой вогнутости функции.

Требование строгой вогнутости накладывает дополнительные условия на матрицу Гессе

$$H(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица отрицательно определена на множестве  $x > 0$ .

Некоторые примеры неоклассических функций полезности:

а) степенная аддитивная –  $\sum_{i=1}^n a_i x_i^{\alpha_i}$ ,  $a_i > 0$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ;

б) логарифмическая аддитивная –  $\sum_{i=1}^n a_i \ln(1 + b_i x_i)$ ,  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ ;

в) функция Кобба – Дугласа –  $\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $\mu = \alpha_1 + \dots + \alpha_n < 1$ ;

г) степенная средняя –  $\left( \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^{-\rho} \right)^{-\mu/\rho}$ ,  $\beta_i > 0$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $-1 < \rho \neq 0$ ;

д) функция Солоу –  $\left( \sum_{i=1}^n a_i x_i^{\alpha_i} \right)^{-\mu}$ ,  $a_i > 0$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ .

В моделях потребления важное значение играет класс положительно *однородных (гомотетичных) функций полезности*, т. е. таких функций  $u(x)$ , для которых выполняется свойство:

$$u(tx) = t^\mu u(x), \quad \forall t > 0, \tag{1.13}$$

где степень однородности  $\mu \in (0, 1]$ . В случае  $\mu = 1$  функции  $u(x)$  называются линейно однородными. При этом они уже не будут строго вогнутыми и, следовательно, неоклассическими.

В случае дифференцируемости и положительной однородности  $u(x)$  выполняется соотношение Эйлера:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \mu u(x). \quad (1.14)$$

Это соотношение, очевидно, следует из (1.13) после дифференцирования по  $t$  в точке  $t = 1$ .

Однородными являются функция Кобба – Дугласа, степень однородности, которой  $\mu = \alpha_1 + \dots + \alpha_n < 1$ , и степенная средняя (степеней однородности  $\mu$ ).

### 1.3.2. Замещение в потреблении

Концепция потребления, реализуемая в понятии функции полезности, предполагает, что одинаковое удовлетворение, или же одинаковый уровень потребления, достигается при различном сочетании товаров (благ). Другими словами, любому набору  $x^0 \in R_+^n$  эквивалентны все наборы товаров, удовлетворяющие условию

$$u(x) = u(x^0). \quad (1.15)$$

Множество эквивалентных товаров

$$E(x^0) = \{x \in R_+^n : u(x) = u(x^0)\} \quad (1.16)$$

называется поверхностью безразличия.

Зависимость изменения количества потребления товара  $i$  при изменении количества потребления товара  $j$  и сохранении уровня потребления и количеств остальных товаров, при условии дифференцируемости функции  $u(x)$ , определяется частичным (по  $x_i$  и  $x_j$ ) дифференцированием тождества (1.15)

$$d_{ij}u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Замещение товара  $i$  товаром  $j$  определяется функцией  $d_{ij}u(x)$ , которая имеет производную

$$d_{ij}^2 u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i = 2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \quad (1.17)$$

Из условия ненасыщаемости потребления (положительности частных производных функции полезности) следует, что производная (1.17) отрицательна. Ее абсолютное значение, т. е. отношение предельных полезностей

называется *предельной нормой замещения* (ПНЗ) товара  $j$  товаром  $i$ . Эта величина показывает, в какой пропорции должно возрасти потребление товара  $i$  при небольшом уменьшении потребления товара  $j$  и сохранении уровня потребления остальных товаров и полезности в целом.

*Утверждение 3.* Убывание ПНЗ называется *законом Хикса*.

*Вторым законом Госсена* в кардинальной теории называется утверждение, что при рациональном (равновесном) выборе отношение предельных полезностей любой пары из покупаемого набора товаров равно отношению их цен, т. е.

(1.18)

Эффект замещения для однородных функций полезности парный, поэтому в  $n$ -мерном случае следует зафиксировать все переменные, кроме двух.

Рассмотрим однородную функцию полезности двух переменных. Вычислим в общем виде ПНЗ второго продукта первым, т. е. величину

Обозначим величину относительного потребления  $\frac{x_2}{x_1}$  и введем приведенную функцию полезности

Эластичностью замещения продукта  $x_2$  продуктом  $x_1$  называется величина, показывающая, на сколько процентов следует изменить относительное потребление  $\frac{x_2}{x_1}$ , чтобы ПНЗ изменилась на 1 %.

Соответственно, математическое определение эластичности замещения второго продукта первым:

(1.19)

Эластичность замещения продуктов симметрична, поэтому будем обозначать ее  $\epsilon_{21}$ .

## 1.4. Оптимизационная модель задачи рационального потребления

### 1.4.1. Постановка задачи

Рассмотрим рынок  $n$  товаров с заданными ценами  $p_1, \dots, p_n$ . Покупатели выделяют для закупки этих товаров деньги в количестве  $b > 0$ . Их отношение предпочтения представляется индикатором

Под рациональным поведением покупателей понимается покупка набора товаров, наиболее предпочтительного среди всех наборов, доступных при бюджете  $b$ . Это означает, что выбор покупателей  $x$  является решением задачи рационального потребления

(1.20)

Решение этой задачи в рассматриваемом случае  $p > 0$  существует. Зависимость решения от параметров – векторная функция  $x(p, b)$  – называется *функцией спроса*.

Задача (1.20) может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа.

Решением задачи (1.20) являются уравнения с неизвестными:

(1.21)

В случае единственности решения множитель определяется точкой также однозначно:

(1.22)

Следовательно, в условиях оптимального выбора отношение предельной полезности товаров к цене постоянно для всех товаров.

Множитель Лагранжа  $\lambda$  интерпретируется как предельная полезность одной денежной единицы или как предельная полезность денег.

Поэтому равенство (1.22) означает, что, если предельная полезность денег становится постоянной для каждого товара, тогда потребитель получает максимум полезности.

Предельная норма замещения товаров в оптимальном состоянии оценивается соотношением цен (второй закон Госсена):

Равенство системы уравнений (1.21)

(1.23)

называется *бюджетным равенством*.

Продифференцировав бюджетное равенство (1.23) по  $b$ , получим равенство

(1.24)

Это равенство называется в теории потребительского спроса *условием агрегации Энгеля*. Поясним его смысл. Товары, спрос на которые растет с ростом бюджета потребителя, называются ценными, а те товары, спрос на которые с ростом бюджета падает – малоценными.

Зная функции спроса, можно вычислить эластичности по ценам

(1.25)

и бюджету

(1.26)

### 1.4.2. Основное уравнение теории потребления

Сравнительная статика потребления заключается в анализе влияния параметров рынка на спрос.

Анализ влияния параметров на спрос разобьем на три этапа, на каждом из которых будем дифференцировать систему

(1.27)

по параметрам .

1. Исследуем влияние на спрос бюджета. Продифференцируем уравнения (1.27) по , получим

,

где – матрица Гессе.

Первое выражение определяет чувствительность спроса на все товары к изменению количества денег , выделяемых на данный рынок. Второе равенство с учетом свойства множителя Лагранжа позволяет интерпретировать параметр

как скорость убывания предельной полезности денег.

2. Аналогично исследуется влияние изменения цен товаров на спрос. Для этого систему (1.27) следует продифференцировать последовательно по

.

Мы получили матрицу , определяющую чувствительность спроса на каждый товар к ценам всех товаров .

3. Для экономического анализа представляет интерес специальный режим изменения цен, когда одновременно меняется бюджет потребителя так, что достижимый уровень потребления сохраняется, то есть происходит *компенсированное изменение цен*. Исследуем изменение спроса в таком режиме.

Бюджет , определяемый постоянством достижимого уровня потребления, назовем *компенсирующим бюджетом*, а соответствующий спрос

назовем *компенсированным спросом*, тогда

.

Дифференцируя это равенство по получим матрицу .

Итак, получены выражения для частных производных спроса и частных производных компенсированного спроса. Сравнивая эти выражения, получим связь

Это матричное равенство называется *уравнением Слуцкого*.

Вариация реального спроса представляет полный эффект изменения цен. Первый терм правой части предложено интерпретировать как эффект замещения (т.е. компенсированного изменения цены на спрос) и второй терм – как эффект изменения реального дохода (влияние изменения дохода на спрос).

Перепишем уравнение Слуцкого в виде

*Утверждение 4.* Чувствительность компенсированного спроса на любой продукт к собственной цене отрицательна:

Экономический смысл этого неравенства – реакция спроса на любой товар при компенсированном изменении цен всегда нормальная, т. е. соответствует «закону спроса» Курно.

Рассмотрим основные следствия из уравнения Слуцкого.

*Следствие 1.* Ценные товары всегда нормальные.

*Следствие 2.* Товары Гиффена могут быть только малоценными.

Два товара  $(i, j)$  называются взаимодополняющими, если компенсированный спрос на один товар падает с ростом цены другого, т. е.

Экономически это означает, что компенсированное возрастание цены на товар приводит к уменьшению спроса на него.

Товары  $(i, j)$  называются взаимозаменяющими, если

*Следствие 3.* Сумма эластичностей спроса на любой товар относительно всех факторов равна нулю.

*Классификация товаров:*

Товар называется нормальным, если

Товар аномальный (товар Гиффена), если

Товар ценный, если

Товар малоценный, если

## 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

### 2.1. Решение задач

**Задача 1.** Рассмотрим пример исчисления ИПЦ по Ласпейресу и Пааше, основанный на реальной российской статистике потребления картофеля и мяса в России (на одного человека) в 1990 и 1995 годах, представленной в таблице.

Таблица 2.1. Показатели потребления

Продукт	$s = 1990$		$t = 1995$		$p^t/p^s$
	$x^s$ (кг)	$p^s$ (руб)	$x^t$ (кг)	$p^t$ (руб)	
Мясо	59	3,5	47,2	12 000	3428
Картофель	100	0,2	115	2000	10 000

*Решение*

Отметим, что стоимость приведенных наборов составляла в указанные годы соответственно 226,5 и 796400 рублей, т. е. возросла в 3516 раз.

Вычисления по формулам (1.8), (1.9) дают индексы

Здесь соотношение (1.10) не выполняется. Это, видимо, является следствием эффекта Гиффена и говорит о том, что произошедшее за период с 1990 по 1995 года резкое снижение жизненного уровня большинства жителей России (среднедушевой уровень жизни сократился на 40 %) привело к существенному изменению системы предпочтений у основных групп потребителей.

**Задача 2.** Вычислить ПНЗ функции полезности Кобба-Дугласа.

*Решение*

Функция Кобба-Дугласа :

**Задача 3.** Определить эластичность замещения продуктов для функции Кобба-Дугласа.

*Решение*

Эластичность замещения продуктов вычисляется по формуле

Для функции Кобба-Дугласа:

,

,

тогда

**Задача 4.** Определить функции спроса для функции Кобба-Дугласа и вычислить их эластичности.

*Решение*

Легко видеть, что

Тогда можно записать уравнение второго закона Госсена в виде

Присоединяя к этому бюджетное условие, т. е.

получаем систему линейных уравнений, однозначно определяющих спрос

Легко видеть, что эта формула в случае произвольного  $n$  переходит в

Эластичности данного спроса равны: при ;

Сумма эластичностей

**Задача 5.** Определить функции спроса для функции полезности

*Решение*

Вычислим



Составим уравнение Госсена

Перепишем это уравнение в виде

Используя бюджетное уравнение

получим

откуда определяется спрос на :

Подставив это в бюджетное уравнение, получим спрос на

Товар относится к товарам необходимым и товар – к товарам роскоши.

**Задача 6.** Вычислить индексы цен по Ласпейресу, Пааше и Фишеру для двух наборов из двух продуктов:

*Решение*

Вычислим индекс цен по Ласпейресу

индекс цен по Пааше равен:

Индекс цен по Фишеру является средним геометрическим от индексов Ласпейреса и Пааше:

## 2.2. Самостоятельные упражнения

1. Найти предельную норму замещения функции

2. Найти эластичность функции

3. Найти индексы цен по Ласпейресу и Пааше для двух наборов из двух продуктов: ;
4. Найти предельную норму замещения для степенной средней функции
5. Найти эластичность замещения продуктов для степенной средней функции
6. Найти предельную норму замещения функции
7. Построить матрицу Гессе для функции

### 2.3. Тестовые задания

1. Первым исследователем зависимости «спрос-цена» принято считать:
  - a) Р. Гиффен;
  - b) О. Курно;
  - c) А. Маршалл;
  - d) Э. Энгель.
2. Эластичность степенной функции равна:
  - a) ;
  - b) ;
  - c) .
3. Обобщенный скалярный показатель многомерного набора цен или количества некоторой группы товаров, элементарных или уже представляющих агрегаты более низкого уровня называется:
  - a) экономическим индексом;
  - b) эластичностью;
  - c) функцией полезности;
  - d) функцией спроса.
4. Функцией полезности называется:
  - a) количественная мера удовлетворения потребностей при потреблении некоторого продукта или набора продуктов;
  - b) полезность товара;
  - c) количественная характеристика влияния фактора (аргумента) на исследуемое явление (функцию);
  - d) величина, показывающая, на сколько процентов следует изменить относительное потребление, чтобы ПНЗ изменилось на 1 %.
5. Усиление первого закона Госсена является требованием:
  - a) строгой вогнутости функции полезности;
  - b) строгой выпуклости функции полезности;

- с) монотонного возрастания функции полезности;  
 д) монотонного убывания функции полезности.
6. Предельной нормой замещения называется отношение:  
 а) предельных полезностей;  
 б) функций спроса;  
 с) функций полезности;  
 д) эластичностей замещения.
7. Утверждение, что при рациональном выборе отношения предельных полезностей любой пары из покупаемого набора товаров равно отношению их цен, называется:  
 а) первым законом Госсена;  
 б) вторым законом Госсена;  
 с) законом Хикса;  
 д) эластичностью замещения.
8. Решением задачи рационального потребления является выражение:  
 а)  $\max\{u(x): \langle p, x \rangle \geq b, x \geq 0\}$ ;  
 б)  $\min\{u(x): \langle p, x \rangle \leq b, x \geq 0\}$ ;  
 с)  $\max\{u(x): \langle p, x \rangle \leq b, x \geq 0\}$ ;  
 д)  $\min\{u(x): \langle p, x \rangle \geq b, x \geq 0\}$ .
9. Эластичность по ценам определяется формулой:  
 а) ;  
 б) ;  
 с) ;  
 д) .
10. Параметр  $\mu$ , определяемый выражением: , интерпретируется как:  
 а) компенсированное изменение цен;  
 б) скорость убывания предельной полезности денег;  
 с) зависимость бюджета от цен;  
 д) чувствительность спроса на все товары к изменению количества денег  $b$ , выделяемых на данный рынок.
11. Два товара  $(i, j)$  называются взаимодополняющими, если компенсированный спрос:  
 а) на один товар падает с ростом цены другого товара;  
 б) на один товар возрастает с ростом цены другого товара;

- c) на один товар остается неизменным с ростом цены другого товара;  
d) всегда постоянная величина.
12. Количественная характеристика влияния фактора (аргумента) на исследуемое явление (функцию) называется:  
a) полезностью;  
b) эластичностью;  
c) экономическим индексом;  
d) предельной нормой замещения.
13. Рыночным равновесием называется такое состояние, когда в единицу времени на рынок поступает товара:  
a) больше, чем его за то же время продается;  
b) меньше, чем его за то же время продается;  
c) столько, сколько его за то же время при данной цене продается.
14. Индексы Ласпейреса – это базисно взвешенные показатели:  
a) изменения цен и объемов производства;  
b) неизменности цен и объемов производства;  
c) изменения цен и неизменности объемов производства;  
d) неизменности цен и изменения объемов производства.
15. Индексы цен и количеств, предложенные Фишером являются:  
a) средним арифметическим от индексов Ласпейреса и Пааше;  
b) средним геометрическим от индексов Ласпейреса и Пааше;  
c) произведением индексов Ласпейреса и Пааше;  
d) суммой индексов Ласпейреса и Пааше.
16. Предельная норма замещения описывается формулой:  
a)  $-\frac{dx_2}{dx_1}$  ;  
b)  $-\frac{dx_1}{dx_2}$  ;  
c)  $-\frac{dx_1}{dx_2}$  ;  
d)  $-\frac{dx_2}{dx_1}$  .
17. Второй закон Госсена в ординальной теории принимает вид:  
a)  $U_1 = U_2$  ;  
b)  $U_1 = U_2$  ;  
c)  $U_1 = U_2$  ;  
d)  $U_1 = U_2$  .

18. Функция Лагранжа для задачи рационального потребления имеет вид:
- $L(x, \lambda) = u(x) * \lambda(b - \langle p, x \rangle)$ ;
  - $L(x, \lambda) = u(x) + \lambda(b - \langle p, x \rangle)$ ;
  - $L(x, \lambda) = x * \lambda(b - \langle p, x \rangle)$ ;
  - $L(x, \lambda) = u(x) - \lambda(b - \langle p, x \rangle)$ .
19. Сравнительная статика потребления заключается в:
- анализе влияния параметров рынка на предложение;
  - анализе влияния параметров рынка на спрос;
  - определении функции спроса;
  - определении функции обратного спроса.
20. Специальный режим изменения цен, когда одновременно меняется бюджет потребителя так, что достижимый уровень потребления сохраняется, называется:
- единовременным изменением цен;
  - компенсированным изменением цен;
  - периодическим изменением цен.
21. Сумма эластичностей спроса на любой товар относительно всех факторов равна:
- 1;
  - 0;
  - эта величина непостоянна;
  - 1/2.
22. Математическое понятие эластичности определяется формулой:
- ;
  - ;
  - .
23. Отношение стоимости начального набора продуктов в новых ценах к стоимости этого набора в старых ценах называется индексом:
- Ласпейреса;
  - Пааше;
  - Фишера.
24. Статистическим индексом цен и количеств, обладающим свойствами мультипликативности, транзитивности и промежуточности является:
- индекс Пааше;
  - индекс Ласпейреса;
  - индекс Фишера;
  - такого не существует.
25. Матрица, составленная из вторых частных производных функции полезности, называется матрицей:
- Кобба-Дугласа;
  - Гессе;

- c) Госсена;
- d) Гельдера.

26. Функция полезности вида

называется:

- a) степенной аддитивной;
- b) функцией Солоу;
- c) функцией Кобба-Дугласа;
- d) степенной средней.

27. Предельная норма замещения показывает в какой пропорции должно:

- a) возрасти потребление товара  $i$  при небольшом уменьшении потребления товара  $j$ ;
- b) уменьшиться потребление товара  $i$  при небольшом уменьшении потребления товара  $j$ ;
- c) возрасти потребление товара  $i$  при небольшом увеличении потребления товара  $j$ ;
- d) возрасти потребление товара  $i$  при большом уменьшении потребления товара  $j$ .

28. Кривой безразличия называется кривая:

- a) показывающая ограничение со стороны дохода;
- b) показывающая, на сколько изменится величина спроса на товар при изменении его цены на 1 %;
- c) каждая точка на которой представляет собой определенную комбинацию из двух благ, которые доставляют человеку одинаковую полезность;
- d) показывающая затраты в расчете на единицу продукции.

29. Множитель Лагранжа в случае единственности решения  $x^* = x(p, b)$  определяется как:

- a)  $\frac{\partial L}{\partial p_i}$  ;
- b)  $\frac{\partial L}{\partial b}$  ;
- c)  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  ;
- d)  $\frac{\partial L}{\partial x}$  .

30. К параметрам, влияющим на спрос, относят:

- a) бюджет;
- b) изменение цен товаров;
- c) компенсированное изменение цен.

31. Уравнением Слуцкого является выражение:

- a)  $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x^c}{\partial p} - x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- b)  $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x^c}{\partial p} + x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- c)  $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x^c}{\partial p} - x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- d)  $\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x^c}{\partial p} + x \frac{\partial x}{\partial I}$  .

32. Эластичность спроса на товар по его цене означает, на сколько процентов изменится спрос при:

- a) увеличении цены на 1 %;
- b) уменьшении цены на 1 %;
- c) изменении цены;
- d) неизменной цене в течение определенного промежутка времени.

33. В применимости к рыночным (потребительским) ценам выполняется соотношение:

- a)  $\frac{\partial x}{\partial p} < 0$  ;
- b)  $\frac{\partial x}{\partial p} > 0$  ;
- c)  $\frac{\partial x}{\partial p} = 0$  ;
- d) нет устойчивой закономерности.

34. К основным тестам Фишера относят:

- a) идентичность;
- b) непрерывность;
- c) дискретность;
- d) пропорциональность.

35. Однородными функциями полезности называются функции, для которых выполняется свойство:

- a)  $\frac{\partial x}{\partial p} = -x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- b)  $\frac{\partial x}{\partial p} = x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- c)  $\frac{\partial x}{\partial p} = 0$  ;
- d)  $\frac{\partial x}{\partial p} = 1$  .

36. Предельная норма замещения для функции Кобба-Дугласа равна:

- a)  $\frac{\partial x}{\partial p} = -x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;
- b)  $\frac{\partial x}{\partial p} = x \frac{\partial x}{\partial I}$  ;

c) ;

d) .

37. Величина, показывающая, на сколько процентов следует изменить относительное потребление , чтобы предельная норма замещения изменилась на 1 %, называется:

- a) эластичностью замещения;
- b) относительным замещением;
- c) абсолютным замещением;
- d) предельным замещением.

38. В теории потребительского спроса условием агрегации Энгеля называется выражение:

a) ;

b) ;

c) ;

d) .

39. Два товара ( $i, j$ ) называются взаимозаменяемыми, если:

a) ;

b) ;

c) .

40. Выражение из уравнения Слуцкого экономически интерпретируется как эффект:

- a) изменения реального дохода;
- b) изменения цен;
- c) замещения.

41. Товары Гиффена могут быть только:

- a) малоценными;
- b) ценными;
- c) нормальными.



42. В соответствии с «законом спроса» эластичность товара по его же цене:
- отрицательна;
  - положительна;
  - равна нулю;
  - невозможно определить.
43. Модель спроса Гиффена демонстрирует эффект:
- возрастания спроса на продукт, вызванного ростом его цены;
  - понижения спроса на продукт, вызванного ростом его цены;
  - возрастания спроса на продукт, вызванного снижением его цены;
  - понижения спроса на продукт, вызванного снижением его цены.
44. Тест Фишера \_\_\_\_\_ называется:
- промежуточностью;
  - транзитивностью;
  - тестом стоимости;
  - пропорциональностью.
45. Первым законом Госсена является:
- монотонное возрастание предельной полезности;
  - свойство убывания предельной полезности;
  - свойство строгой выпуклости функции полезности;
  - свойство непрерывности предельной полезности.
46. Однородными являются функции:
- Кобба-Дугласа;
  - степенная средняя;
  - Солоу;
  - степенная аддитивная.
47. Предельная норма замещения для степенной средней функции равна:
- \_\_\_\_\_ ;
  - \_\_\_\_\_ ;
  - \_\_\_\_\_ ;
  - \_\_\_\_\_ .

48. Если  $\epsilon_{12}$  – эластичность замещения второго продукта первым,  $\epsilon_{21}$  – эластичность обратного замещения (первого продукта вторым), тогда выполняется соотношение:

- a)  $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ ;
- b)  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21}$ ;
- c)  $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}^{-1}$ ;
- d)  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21}^{-1}$ .

49. Ценные товары – это товары:

- a) спрос на которые растет с ростом бюджета потребителя;
- b) спрос на которые растет с уменьшением бюджета потребителя;
- c) предложение которых растет с ростом бюджета потребителя;
- d) предложение которых уменьшается с ростом бюджета потребителя.

50. Системы в вариациях – это:

- a) производные решения по параметрам задачи;
- b) системы решения уравнений;
- c) системы, определяющие производные решения по параметрам задачи.

51. Выражение  $\frac{\partial x_1}{\partial x_2}$  из уравнения Слуцкого экономически интерпретируется как эффект:

- a) изменения цен;
- b) замещения;
- c) изменения реального дохода.

52. Для товаров с парадоксальным спросом Гиффена эластичность товара по его же цене:

- a) отрицательна;
- b) положительна;
- c) равна нулю;
- d) невозможно определить.

53. К функциям спроса Энгеля-Торнквиста **не** относят:

- a)  $x_1 = \frac{I}{2}$ ;
- b)  $x_1 = \frac{I}{2} + \frac{I}{2} \frac{p_1}{p_2}$ ;
- c)  $x_1 = \frac{I}{2} + \frac{I}{2} \frac{p_2}{p_1}$ ;
- d)  $x_1 = \frac{I}{2} + \frac{I}{2} \frac{p_1^2}{p_2}$ .

54. Тест Фишера называется:
- a) мультипликативностью;
  - b) транзитивностью;
  - c) идентичностью;
  - d) пропорциональностью.
55. Авторами теории предельной полезности принято считать:
- a) Г. Госсен;
  - b) О. Курно;
  - c) А. Маршалл;
  - d) Л. Вальрас.
56. Множество эквивалентных товаров называется:
- a) множеством Парето;
  - b) поверхностью безразличия;
  - c) множеством эквивалентных товаров.
57. Убывание предельной нормы замещения называется законом:
- a) Хикса;
  - b) Парето;
  - c) Госсена;
  - d) Вальраса.
58. Эластичность замещения продуктов для функции Кобба-Дугласа равна:
- a) 2;
  - b)  $1/2$ ;
  - c) 1;
  - d) 0,1.
59. Товары, спрос на которые с ростом бюджета падает, называются:
- a) ценные;
  - b) неценные;
  - c) малоценные;
  - d) бесценные.
60. Выражение определяет:
- a) компенсированное изменение цен;
  - b) скорость убывания предельной полезности денег;
  - c) зависимость бюджета от цен;
  - d) чувствительность спроса на все товары к изменению количества денег, выделяемых на данный рынок.
61. Ценные товары всегда:
- a) только малоценны;
  - b) иногда малоценны, иногда нормальные;
  - c) нормальные.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современной экономической теории и количественных методах анализа рынков важнейшую роль играют зависимости объемов возможных продаж некоторого товара или набора товаров от их цен и бюджета потенциальных покупателей. Такие зависимости называются функциями спроса. Основной «закон спроса» гласит, что спрос на любой продукт падает с ростом его цены. Количественной мерой влияния цены блага на объем спроса является эластичность.

Товары, отличающиеся по своим потребительским свойствам и ценой, необходимо объединять в группы по близким свойствам, т. е. агрегировать, приписывая им некоторым образом усредненные показатели количества и цены. Такие показатели называются экономическими индексами.

В результате сложения индивидуальных функций спроса всех потребителей некоторого блага образуется рыночный спрос. Рыночным равновесием называется такое состояние, когда в единицу времени на рынок поступает столько товара, сколько его за это же время при данной цене продается.

Люди приобретают блага для удовлетворения своих потребностей. Способность благ удовлетворять потребности людей называют полезностью. Количественной мерой удовлетворения потребностей при потреблении некоторого продукта или набора продуктов представляется функцией полезности. Множество возможных значений аргументов этой функции определяется существующей системой цен и бюджетом потребителя.

Поведение потребителя на рынке благ определяется его стремлением к максимизации функции полезности при заданном бюджетном ограничении. Предельная полезность денег становится постоянной для каждого товара, тогда потребитель получает максимум полезности.

Товары, спрос на которые растет с ростом бюджета потребителя, называются ценными, а те товары, спрос на которые с ростом бюджета падает – малоценными.

Сравнительная статика потребления заключается в анализе влияния параметров рынка на спрос и описывается уравнением Слуцкого.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ашманов, С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. – М.: Наука, 1984.
2. Горбунов, В. К. Математическая модель потребительского спроса / В. К. Горбунов. – М.: Экономика, 2004.
3. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975.
4. Тарасевич, Л. С. Микроэкономика: электронный учебник / Л. С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А. И. Леусский. – 2004. (<http://www.spbki.ru/rus/parts/microeconomics/>).
5. Энджел, Д. Ф. Поведение потребителей / Д. Ф. Энджел, Р. Д. Блэкуэлл, П. У. Миниард. – СПб.: Питер Ком, 1999.