Е. М. Деева

Методические указания по решению типовых задач по дисциплине «Линейная алгебра и линейное программирование»

Ульяновск 2002

Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский Государственный Технический Университет

Е. М. Деева

Методические указания по решению типовых задач по дисциплине «Линейная алгебра и линейное программирование»

Для студентов 5 курса специальности
061100 «Менеджмент»

Ульяновск 2002

УДК 658

ББК 65.059 я 73

Д 26

Рецензент д.ф.-м.н. профессор П.А.Вельмимов

Д 26 **Деева Е.М**. Методические указания по решению типовых задач по дисциплине: «Линейная алгебра и линейное программирование». - Ульяновск: УлГТУ, 2002. – 42с.

Представлен многоуровневый подход к вопросам решения типовых задач по дисциплине: «Линейная алгебра и линейное программирование». Материалы включают как теоретические, так и практические вопросы, касающиеся раскрытия понятий и методов математического моделирования социально-экономических систем и процессов. В методических указаниях рассматриваются, общесистемные прикладные экономико-математические модели, общие для всех перечисленных специальностей; оптимальные модели, модели линейного программирования, балансовые модели в статистической и динамической постановке.

Для студентов, преподавателей, аспирантов и студентов вузов, практических работников.

УДК 658

ББК 65.050 я 73

Введение

Методические указания подготовлены в соответствии с программой дисциплины «Линейная алгебра и линейное программирование» для специальностей 061100 «Менеджмент» на основе Государственных образовательных стандартов и программ.

Основное содержание этих тем заключается в раскрытии понятий и методов математического моделирования социально-экономических систем и процессов, решаемых на основе теории линейной алгебры и линейного программирования. При этом в методических указаниях рассматриваются общесистемные прикладные модели линейного программирования, балансовые модели в статистической и динамической постановке. Кроме того, в методические указания в соответствии с требованиями образовательных стандартов включены такие прикладные модели, как модели управления запасами, системы массового обслуживания, теории игр.

По окончании изучения курса студент должен знать методы исследования основных макро- и микроэкономических задач: экономико-математические методы оптимизации и распределения ресурсов, экономико-статистические методы и эконометрические модели анализа данных и оценке эффективности деятельности, модели и методы оценки выгодности и качества принятия инвестиционных решений.

Часть 1. Математический аппарат

Изучение и понимание современных экономико-математических методов предполагает достаточно серьезную математическую подготовку экономистов. Для освоения задач и методов в пределах изучаемой дисциплины необходимы знания основных понятий и элементов высшей математики, матричной и векторной алгебры. Некоторые необходимые сведения из этих разделов математики приведены ниже.

Тема 1. Матрицы и определители

Рассмотрим mxn действительных чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Данная таблица чисел называется *числовой матрицей* (в дальнейшем – просто *матрицей*). Числа a_{ij}, которые входят в матрицу, называются ее *элементами*. Индексы i и j элемента a_{ij} указывают соответственно номера строки и столбца, в которых расположен элемент a_{ij}. Матрицу, содержащую одну строку (или один столбец), называют также *вектор-строкой* (или вектор-столбцом). Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Две матрицы называются *равными*, если число строк и столбцов одной из них равно соответственно числу строк и столбцов другой и элементы этих матриц, расположенные на соответствующих местах, равны.

Матрицей, *транспонированной* к матрице A, называется матрица вида

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

т. е. – строками матрицы A' являются столбцы, а столбцами – строки матрицы A.

Если число строк равно числу столбцов (m = n), матрицу называют *квадратной матрицей* порядка n.

Элементы a_{11}, a_{22}, $a_{33},...,$ a_{nn} образуют так называемую *главную диагональ* квадратной матрицы; элементы a_{1n}, $a_{2n-1},...,$ a_{n1} – побочную диагональ квадратной матрицы.

Рассмотрим некоторые действия над матрицами.

1. Произведением матрицы А на число λ (или, что то же самое, числа λ на матрицу А) называется матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

получающаяся из А путем умножения каждого ее элемента на число λ.

2. Под суммой двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

понимается матрица

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц А и В. При этом подразумевается, что число строк (столбцов) матрицы А равно числу строк (столбцов) матрицы В. Подобным же образом определяется и разность (А – В) матриц А и В.

Линейные операции над матрицами подчиняются обычным законам арифметики, например:

А + В = В + А, А + 0 = А,

(все элементы матрицы 0 – нули),

λ (А + В) = λА + λВ , 0 · А = 0 (λ = 0).

3. Произведением матрицы A из m строк и n столбцов на матрицу B из n строк и k столбцов называется матрица C = AB, имеющая m строк и k столбцов, элемент C_{ij} которой, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е. находится по формуле скалярного произведения i-й вектор-строки матрицы A на j-й вектор-столбец матрицы B:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in} + b_{nj}.$$

В случае квадратных матриц можно составить как произведение AB, так и произведение BA. В общем случае AB ≠ BA, т. е. переместительный закон для матриц не выполняется.

Для произведения матриц остаются в силе следующие законы арифметики:

1) распределительный закон (A + B) C = AC + BC, C (A + B) = CA + CB;

2) сочетательный закон (AB) C = A (BC).

Среди квадратных матриц особую роль играет матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

все элементы которой, расположенные на главной диагонали, равны единице, а остальные – нулю. Можно проверить, что для любой матрицы A: AE = EA = A. Матрица E называется *единичной.*

Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если AB = BA = E. Матрица B, обратная матрице A, обозначается через A^{-1}.

С каждой квадратной матрицей определенным образом связано некоторое число, называемое его определителем. Для вычисления определителя любого порядка необходимо знание его свойств и теоремы о разложении определителя.

Приведем основные свойства определителей.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. Это свойство свидетельствует о полном равноправии строк и столбцов определителя. Следовательно, если некоторое утверждение справедливо относительно столбцов определителя, то аналогичное утверждение справедливо и для его строк.

2. Если все элементы какого-либо столбца (строки) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

3. При перестановке двух любых, столбцов (строк) определителя его знак меняется на противоположный, а абсолютная величина остается неизменной.

4. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.

5. Если j-й столбец (строка) A_j определителя D является линейной комбинацией

$$A_j = \lambda B + \mu C$$

двух произвольных столбцов (строк) B и C, то и сам определитель оказывается линейной комбинацией

$$D = D_j(\lambda B + \mu C) = \lambda D_j(B) + \mu D_j(C)$$

определителей $D_j(B) + D_j(C)$.

Здесь $D_j(B) + D_j(C)$ – определитель D, в котором столбец (строка) j заменен соответственно на столбец (строку) B и C. Остальные столбцы (строки) сохранены без изменения.

6. При умножении любого столбца (строки) определителя на произвольное число λ сам определитель умножается на это же число.

7. Если какой-либо столбец (строка) определителя является линейной комбинацией других его столбцов (строк), то определитель равен нулю.

8. Определитель не изменится, если к элементам любого его столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), предварительно умноженные на одно и то же число.

Рассмотрим определитель n-го порядка:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выделим в нем некоторый элемент, например a_{ij}. Вычеркнем в определителе i-ю строку и j-й столбец, в которых расположен выделенный элемент a_{ij}. В результате останется определитель (n – 1)-го порядка. Этот оставшийся определитель называется минором элемента a_{ij} в определителе D и обозначается M_{ij}.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе D (или соответствующей квадратной матрице).

Теорема о разложении определителя. Определитель матрицы А равен сумме произведений всех элементов некоторого столбца (строки) на их алгебраические дополнения:

$$D = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Рассмотрим примеры вычисления определителей (предполагается знание правил вычисления определителей второго порядка).

Пример 1. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель D по элементам второго столбца:

$$D = 3A_{12} + 2A_{22} + 5A_{32}.$$

Переходя к минорам, имеем:

$$D = 3\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 11 + 2\cdot 1 - 5\cdot(-6) = -1.$$

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойства определителей, получим единичную первую строку и разложим по ней определитель D; аналогично поступим с первым столбцом преобразованного определителя:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & -2 & -8 & -10 \\ 4 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -36 \end{vmatrix} = -4\cdot 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -16(-9-1) = 16\cdot 10 = 160.$$

Тема 2. Решение систем линейных уравнений

Решение систем линейных уравнений с n неизвестными (такие системы линейных уравнений называются *определенными*):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных, называют определителем системы (1.1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решить систему уравнений (1.1) можно различными методами, в частности, методом Крамера. В основе решения системы уравнений (1.1) методом Крамера лежит следующая теорема.

Теорема Крамера. Если определитель Δ системы (1.1) отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти по формуле

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}.$$

В этой формуле Δ_j является определителем, полученным из определителя системы Δ путем замены столбца j столбцом свободных членов.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными (1.1) можно записать в матричном виде: AX = B, где A – квадратная матрица порядка n, составленная из коэффициентов при неизвестных; X – вектор-столбец из неизвестных; B – вектор-столбец свободных членов.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Если A – невырожденная матрица, т. е. ее определитель $|A| \neq 0$, то можно определить A^{-1}. С учетом этого имеют место матричные соотношения:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,\ E \cdot X = A^{-1} \cdot B,\ X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.2)$$

Обратная матрица может быть определена на базе следующей теоремы.

Теорема о существовании обратной матрицы. Если определитель матрицы A не равен нулю, то матрица A имеет обратную матрицу A^{---1}, которая находится по формуле

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\overline{A}$, где $\overline{A}$ – матрица*, присоединенная* к матрице A.

Матрица $\overline{A}$ составляется из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, соотношение (1.2) лежит в основе решения системы уравнений (1.1) методом обратной матрицы.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными (при m < n такие системы называются *неопределенными*):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \qquad (1.3)$$

или в векторной записи:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$,…, $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – соответствующие вектор-столбцы.

Запишем *расширенную* матрицу этой системы в виде

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & & \dots & A_n & B \end{array} \\ \hat{A} = & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \end{array}$$

Элементарными преобразованиями системы (1.3) (или матрицы $\hat{A}$) называются следующие преобразования:

- перестановка любых двух уравнений;
- умножение обеих частей одного из уравнений на любое отличное от нуля число;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, отличное от нуля;
- вычеркивание нулевой строки (уравнения с нулевыми коэффициентами и свободным членом, равным 0).

Можно показать, что элементарные преобразования переводят данную систему уравнений в эквивалентную систему. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если каждое решение первой системы (если они существуют) является решением второй, и наоборот. Соответствующие расширенные матрицы также называются эквивалентными.

При практическом решении системы линейных уравнений *методом Жордана-Гаусса* последовательно над строками матрицы $\hat{A}$ выполняются элементарные преобразования так, что некоторое неизвестное исключается из всех уравнений, кроме одного, т. е. в составе расширенной матрицы формируется единичная матрица.

В процессе решения могут встретиться следующие случаи.

1. Будет получена матрица $\hat{A}'$, эквивалентная матрице $\hat{A}$, в левой части

некоторой ее строки стоят нули, а в правой – число, отличное от нуля, что соответствует уравнению

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i', \quad b_i' \neq 0.$$

Это признак несовместности системы (1.3), т. е. система не имеет решений.

2. В результате преобразований получена матрица $\hat{A}'$ вида:

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2' \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n' \end{pmatrix}.$$

В этом случае система (1.3) совместна, определенная и имеет единственное решение: $x_1 = b_1'$, $x_2 = b_2'$, $\ldots, x_n = b_n'$.

3. На некотором этапе получена расширенная матрица вида

$$\hat{A}' = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1r+1}' & \ldots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2r+1}' & \ldots & a_{2n}' & b_2' \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{rr+1}' & \ldots & a_{rn}' & b_r' \end{array}\right).$$

Система совместна и имеет бесчисленное множество решений. *Общее решение* системы можно записать в виде:

$$x_1 = b_1' - a_{1r+1}'x_{r+1} - \ldots - a_{1n}'x_n,$$

$$x_2 = b_2' - a_{2r+1}'x_{r+1} - \ldots - a_{2n}'x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_r = b_r' - a_{rr+1}'x_{r+1} - \ldots - a_{rn}'x_n.$$

Придавая каждой из стоящих в правых частях равенств переменных x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n произвольные значения, будем получать *частные решения* системы.

Неизвестные x_1, x_2,…, x_r называются *базисными*, или *основными*, они соответствуют линейно-независимым векторам A_1,…, A_r.

Таким образом, любые r переменных называются базисными (основными), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля, а остальные (n – r) переменных называются *свободными*, или *неосновными*. *Базисным решением* системы уравнений называется частное решение, в котором неосновные переменные имеют нулевые значения. Каждому разбиению на основные и неосновные переменные соответствует одно базисное решение, а количество способов разбиения не превышает величины

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Если все компоненты базисного решения неотрицательны, то такое решение называется *опорным*.

Пример 3. Исследовать систему уравнений методом Жордана-Гаусса

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 4$$

$$x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = -3$$

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 1$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы уравнений и последовательно преобразуем ее элементарными преобразованиями

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -22 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -11 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -11 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -11 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lllllll} x & & & + & 21x_5 & = & -8 \\ x_2 & - & x_4 & - & 7x_5 & = & 3 \\ x_3 & - & 2x_4 & - & 11x_5 & = & 6 \end{array}.$$

Таким образом, система совместна, имеет бесчисленное множество решений. Общее решение записывается в виде

$$x_1 = -8 - 21x_5,$$

$$x_2 = 3 + x_4 + 7x_5,$$

$$x_3 = 6 + 2x_4 + 11x_5.$$

Любое частное решение получается из общего путем придания конкретных значений свободным переменным x_4 и x_5. Например, (– 8; 4; 8; 1; 0) – частное решение. Одно из базисных решений получаем при $x_4 = x_5 = 0$, т. е. (– 8 ; 3; 6; 0; 0). Число базисных решений не превосходит $C_5^3 = 10$. Перейдем к другому базисному решению, взяв в расширенной матрице в качестве базисных векторы A_1, A_2, A_4; при этом переменные x_1, x_2, x_4 будут базисными, а

x_3, x_5 – свободными. Переход от одного базиса к другому осуществим методом Жордана-Гаусса, т. е. используя элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -11 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -0,5 & -1 & 5,5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & -8 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 & 5,5 & -3 \end{array}\right).$$

Таким образом, полученное еще одно базисное решение: (– 8; 0; 0; – 3; 0) и т. д. Заметим, что оба полученных базисных решения не являются опорными решениями.

Тема 3. Линейные векторные пространства

Определение. Упорядоченная система из n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ называется n-мерным вектором и обозначается $\bar{a} = A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Числа a_j (j = 1, 2,…, n) называются компонентами вектора $\bar{a} = A$.

Определение. Совокупность всевозможных n-мерных векторов с введенными в нее операциями сложения и умножения на число называется n-мерным векторным пространством.

В матрице из m строк и n столбцов строки являются n-мерными векторами, столбцы – m-мерными векторами и т. д.

Вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ равны, если совпадают их компоненты, стоящие на одинаковых местах, т. е. если $a_j = b_j$ при $j = 1,2,\ldots,n$.

Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$. Роль нуля играет нулевой вектор $\bar{0} = (0,0,...,0)$.

Противоположным вектору $\bar{a}$ называется вектор $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$; очевидно, что $\bar{a} + (\overline{-a}) = \bar{0}$. Разность векторов $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$.

Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$. Из этого определения вытекают следующие важные свойства:

$$\lambda(\overline{a} \pm \overline{b}) = \lambda\overline{a} \pm \lambda\overline{b},$$

$$(k \pm \lambda)\overline{a} = k\overline{a} + \lambda\overline{a},$$

$$k(\lambda\overline{a}) = (k\lambda)\overline{a}.$$

Следствиями этих свойств являются следующие свойства: $0 \cdot \overline{a} = 0,\ (-1)\overline{a}, = -\overline{a}, \lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}.$ Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (A и B) называется действительное число, равное сумме произведений соответствующих компонент этих векторов:

$$\text{AB} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n.$$

Например, левая часть линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ может быть представлена в виде скалярного произведения векторов A · X, где A = $a_1, a_2, ..., a_n$, X = $x_1, x_2, ..., x_n$.

Вектор B называется *линейной комбинацией* векторов A_1, A_2,…, A_n, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, при которых выполняется соотношение B $= \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n$. Система векторов $A_1, A_2, ..., A_r$ (r ≥ 2) называется *линейно-зависимой*, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных, и *линейно-независимой* – в противном случае. Можно сформулировать следующие равносильные сказанному определения.

Система векторов $A_1, A_2, ..., A_r$ – линейно-зависимая, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, не все равные нулю, при которых имеет место равенство $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_r A_r = 0.$

Если последнее соотношение возможно лишь в случае, когда все $\lambda_j = 0\ \ (j = \overline{1, r})$, то система векторов называется линейно-независимой. Например, система векторов A_1 =(2, 4, 3), A_2 = (2, 3, 1), A_3 = (5, 3, 2), A_4 = (1, 7, 3) линейно-зависима: $A_1 + 2A_2 - A_3 - A_4 = 0$.

Рангом системы векторов

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}),$$

$$A_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$$

называется максимальное число линейно-независимых векторов этой системы. Ранг системы векторов равен *рангу матрицы* A, составленной из компонент векторов этой системы, т. е. наивысшему порядку минора матрицы А, отличного от нуля.

Пимер 4. Определить, является ли система векторов $A_1 = (5, 4, 3, 2)$, $A_2 = (3, 3, 2, 2)$, $A_3 = (8, 1, 3, -4)$ линейно-зависимой; если она линейно-зависима, то найти ее максимальную линейно-независимую подсистему.

Решение. Составим матрицу из компонент векторов и найдем ее ранг. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Минор второго порядка $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Рассмотрим два минора третьего порядка, которые его окаймляют:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 118 - 118 = 0, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(59 - 59) = 0.$$

Ранг матрицы А равен 2, поэтому система векторов является зависимой. В матрицах, составленных из компонент любых двух векторов данной системы, содержатся миноры второго порядка, отличные от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Поэтому максимальная линейно-независимая подсистема состоит из двух любых векторов, а третий вектор является их линейной комбинацией.

Базисом n-мерного пространства называется любая совокупность n линейно-независимых векторов этого же пространства.

Теорема о единственном представлении вектора. Любой вектор n-мерного пространства можно представить как линейную комбинацию векторов базиса, притом единственным образом.

Один из базисов n–мерного векторного пространства образует система единичных векторов

$$E_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$E_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n = (0,0,\ldots,1).$$

Компоненты любого n –мерного вектора можно считать координатами этого вектора в единичном базисе.

Пусть заданно n-мерное линейное пространство E^n .

Определение. Множество X называется выпуклым, если вместе с любыми точками x_1 и x_2 множеству принадлежат точки (отрезок) $\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1$ при всех $0 \le \lambda \le 1$.

Множество на рис. 1.1, а – выпуклое, на рис. 1.1, б – невыпуклое.

Рис. 1.1

Определение. Функция f $(\overline{X})$, заданная на выпуклом множестве $X \subset E^n$, называется выпуклой, если для любых двух точек x_1 и x_2 из X и любого числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1).$$

Определение. Функция f $(\overline{X})$, заданная на выпуклом множества X, называется вогнутой, если для любых двух точек x_1 и x_2 из X и любого числа $0 \le \lambda \le 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1] \ge \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1).$$

Если приведенные неравенства считать строгими и они выполняются при $0 < \lambda < 1$, то функция f $(\overline{X})$ – строго выпуклая (вогнутая).

Можно показать, что если f $(\overline{X})$ – выпуклая функция, то функция f $(\overline{X})$ – вогнутая, и наоборот.

На рис. 1.2, а функция f $(\overline{X})$ – выпуклая, на рис.1.2, б – вогнутая.

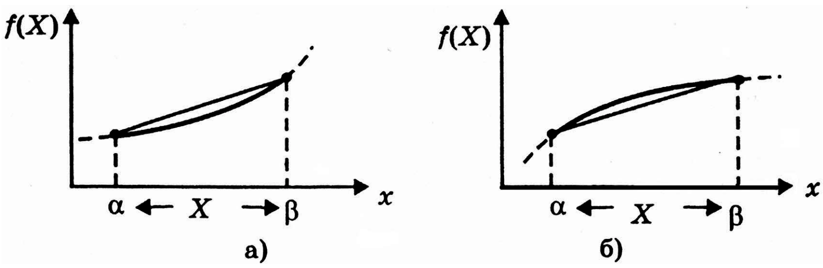


Рис. 1.2

Справедливы следующие утверждения относительно выпуклых множеств и функций.

1. Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.
2. Сумма вогнутых (выпуклых) функций есть вогнутая (выпуклая) функция.
3. Если f ($\overline{X}$) выпуклая функция при $\overline{X} \geq 0$, то множество всех точек, удовлетворяющих условиям $f(\overline{X}) \leq b$, $\overline{X} \geq 0$, выпукло (если оно не пустое; b - постоянная).
4. Пусть f ($\overline{X}$) – выпуклая (вогнутая) функция, заданная на замкнутом выпуклом множестве $X \subset E^n$, тогда любой локальный минимум (максимум) f ($\overline{X}$) на X является и глобальным.

Приведем необходимое и достаточное условие выпуклости функции многих переменных. Пусть функция f ($\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$) имеет все частные производные второго порядка, образующие матрицу

$$Q(\overline{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Эта функция является выпуклой в области X тогда и только тогда, когда матрица Q для любой точки из этой области является неотрицательно (положительно) определенной. Напомним, что квадратная матрица $Q = (q_{i,j})_{n \times n}$ называется *неотрицательно (положительно) определенной,* если все определители

$$\Delta_1 = q_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е. все главные миноры матрицы Q неотрицательны (положительны).

Пример 5. Показать, что функция $f(\overline{X}) = 2x_1^3 + x_2 - 6$ является выпуклой при $x_1 \geq 0$.

Составим матрицу из частных производных второго порядка для

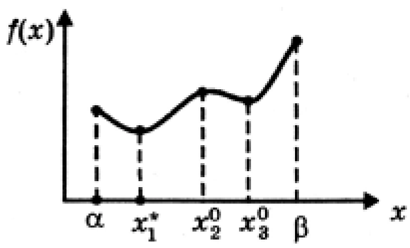
$$f(\overline{X}): Q(\overline{X}) = \begin{pmatrix} 12x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем определители $\Delta_1 = 12x_1$, $\Delta_2 = 0$. Так как при $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 = 0$ при $x_1 \geq 0$, то функция является выпуклой.

Дадим определение глобального и локального максимумов. Функция $f(\overline{x})$ достигает на замкнутом (т. е. включающем свою границу) множестве X глобальный максимум в точке $\overline{x}^*$, если для любой точки, принадлежащей X($\overline{x} \in X$), выполняется условие $f(\overline{x}) \leq f\left(\overline{x}^*\right)$.

Функция $f(\overline{x})$ достигает на замкнутом множестве X локального максимума в точке x^0, если существует некоторая окрестность этой точки, для каждой точки которой выполняется условие $f(\overline{x}) \leq f\left(\overline{x}^0\right)$.

Определения локального и глобального минимума формулируются аналогично.



На рис. 1.3 x_3^0 - точка локального минимума; $\overline{x}_1^*$ - глобального минимума; α, x_2^0 - точки локального максимума; β - точка глобального максимума.

Рис.1.3

Необходимые условия экстремума (максимума, минимума). Если в точке $\overline{x}^0 \in X$ функция $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет экстремум, то частные производные первого порядка равны нулю в этой точке:

$$\frac{\partial f(\overline{x}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Достаточные условия существования экстремума здесь не формулируются. О самом существовании точек глобального минимума и максимума говорит следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(\overline{x})$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области X, то она достигает в ней своих точных границ, верхней и нижней (глобальный максимум и глобальный минимум).

Приведенные утверждения относительно выпуклых множеств и функций, условий существования экстремума позволяют делать выводы о свойствах тех или иных задач оптимального программирования, что является основой разработки и применения математических методов их решения. Например, симплекс-метод решения задачи линейного программирования использует, в частности, «свойство выпуклости» этой задачи: не существует локального экстремума, отличного от глобального.

Часть 2. Основные методы решения типовых экономико-математических задач

Тема 1. Основы линейного программирования

Пример 1. Задача о смесях. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем — не более 0,3 %. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Характеристика	**Компонент автомобильного бензина**			
	№ 1	**№ 2**	**№ 3**	**№ 4**
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден. ед./т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Решение. Для решения этой задачи сформулируем ее экономико-математическую модель, т. е. сформулируем задачу математически (Приложение, формула 1).

Введем необходимые обозначения: пусть x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) — количество в смеси компонента с номером *j*. С учетом этих обозначений имеем задачу (критерий оптимальности — «минимум себестоимости»):

$$\min f(\overline{X}) = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4, \qquad (2.1)$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000,$$

$$68x1 + 72x2 + 80x3 + 90x4 \geq 76 \cdot 1000, \qquad (2.2)$$

$$0{,}35x1 + 0{,}35x2 + 0{,}3x3 + 0{,}2x4 \leq 0{,}3 \cdot 1000, \qquad (2.3)$$

$$x_1 \leq 700,$$
$$x_2 \leq 600,$$
$$x3 \leq 500,$$
$$x_4 \leq 300,$$
$$xj \geq 0,\ j = 1,\ 2, 3, 4.$$

Функциональное ограничение (2.1) отражает необходиость получения заданного количества смеси (1 000 т); (2.2) и (2.3) - ограничения по октановому числу и содержанию серы в смеси; остальные - ограничения на имеющиеся объемы соответствующих ресурсов (компонентов). Прямые ограничения очевидны и принципиально важны для выбора метода решения.

Полученная математическая задача - задача линейного программирования. Она может быть решена симплекс-методом, который рассмотрен в данном разделе ниже (Часть 2, Тема 2). В результате получается оптимальное решение

$$X = (x^*_1, x^*_2, x^*_3, x^*_4) : x^*_1 = 571 \text{ т},$$
$$x^*2 = 0,\ x^*3 = 143\text{т},\ x^*4 = 286\text{т}.$$

Подставляя найденное решение в целевую функцию, имеем

$$F(\overline{X}^*) = 40 \cdot 571 + 45 \cdot 0 + 60 \cdot 143 + 90 \cdot 286 = 57\,160{,}0 \text{ (ден. ед.)}.$$

Таким образом, оптимальному решению $(\overline{X}^*)$ будет отвечать минимальная себестоимость в 57160,0 ден. ед.

Тема 2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Пример 2. Для производства продукции типа $П_1$ и $П_2$ предприятие использует два вида сырья: $С_1$ и $С_2$. Данные об условиях приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Сырье	Расходы сырья на единицу продукции, кг/ед.		Количество сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
$С_1$	1	3	300
$С_2$	1	1	150
Прибыль, тыс. руб./ед. прод.	2	3	-

Составить план производства по критерию «максимум прибыли».

Решение. Обозначим объем производства продукции $П_1$ через x_1, продукции $П_2$ через x_2. С учетом этих обозначений математическая модель задачи имеет вид

$$\max f(\overline{X}) = 2x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$x_1 + 3x_2 \le 300,$$
$$x_1 + x_2 \le 150,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Приведем эту задачу к каноническому виду (Приложение 1, формула 1), введя дополнительные переменные x_3 и x_4:

$$\max f(\overline{X}) = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & B \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_1 + & \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x_2 + & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_3 + & \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_4 = & \begin{pmatrix}300\\150\end{pmatrix}, \end{array}$$

или $x_1 + 3x_2 + x_3 = 300,$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 150,$$
$$x_j \ge 0, \text{ или } j = \overline{1,4}.$$

Задача обладает исходным опорным планом (0, 0, 300, 150), и ее можно решить симплекс-методом; решение ведется в симплекс-таблицах (табл..2.3).

В исходной симплекс-таблице строка оценок $\Delta_j = z_j — c_j$ определяется по формуле 2 (Приложение):

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 = — 2,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 3 = — 3.$$

Исходный опорный план (0, 0, 300, 150) не является оптимальным, так как среди оценок Δ_j имеются отрицательные оценки.

Таблица 2.3

Номер сим-плекс-табли-цы	**Базис**	**c_j / c_i**	**План B**	**2**	**3**	**0**	**0**	**Q**
				A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	
0	$\leftarrow A_3$	0	300	$\boxed{1}$	3	1	0	100
	A_4	0	150	1	1	0	1	150
	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	— 2	— 3	0	0	
I	$\rightarrow A_2$	3	100	1/3	1	1/3	0	300
	$\leftarrow A_4$	0	50	$\boxed{2/3}$	0	- 1/3	1	75
	Δ_j		300	- 1	0	1	0	—
II	A_2	3	75	0	1	0,5	- 0,5	—
	$\rightarrow A_1$	2	75	1	0	- 0,5	-1,5	
	Δ_j	—	375	0	0	0,5	1,5	—

Переход к новому опорному плану осуществим, введя в базис вектор A_2, имеющий отрицательную минимальную оценку. Определяем вектор, выходящий из базиса (Приложение, формула 4):

$$Q = \min\left(\frac{300}{3}, \frac{150}{1}\right) = 100,$$

т. е. вектор A_3 следует вывести из базиса. Главным направляющим элементом является $a_{1,2}$ = 3 (выделен рамочкой). Переход к следующей симплекс-таблице осуществляем с помощью преобразований Жордана-Гаусса.

Второй опорный план (0, 100, 0, 50) не оптимальный; переход к следующему опорному плану осуществим, вводя в базис вектор A_1 и выводя вектор A_4. В результате получаем оптимальный план (75, 75, 0, 0), т. е. предприятие получит максимум прибыли в размере 375,0 тыс. руб., если выпустит 75 единиц продукции первого вида и 75 единиц продукции второго вида.

Тема 3. Симплекс-метод с искусственным базисом (М-метод)

Пример 3. Найти максимум целевой функции

$$\max f(\overline{X}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 = 8,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Решение. Матрица условий содержит только один единичный вектор, добавим еще один искусственный вектор (искусственную неотрицательную переменную y_1 в первое ограничение):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получим следующую М-задачу: найти максимум целевой функции

$$\max f(\overline{X}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - My1$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 + y_1 = 8,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ y_1 \ge 0.$$

М-задачу решаем симплекс-методом. Начальный опорный план (0, 0, 6, 8), решение проводим в симплекс-таблицах (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Номер симплекс-таблицы	c_j / c_i	Базис	B	3	2	1	— M	Q
				A_1	A_2	A_3	P_1	
0	— M	$\leftarrow P_1$	8	2	$\boxed{1}$	0	1	4
	1	A_3	6	1	1	1	0	6
	—	Δ_j	—8M+6	—2M—2	—M—1	0	0	—
I	3 1	$\rightarrow A_1$ A_3	4 2	1 0	0,5 0,5	0 1	$\times$	—
	—	Δ_j	14	0	0	0	—	—

В начальной таблице наименьшее Δ_i (Приложение, формула 2) соответствует вектору A_1 — он вводится в базис, а искусственный вектор P_1 из базиса выводится, так как ему отвечает наименьшее Q (Приложение, формула 4). Столбец, соответствующий P_1, из дальнейших симплексных таблиц вычеркивается. Полученный новый опорный план является опорным планом исходной задачи. Для него все $\Delta_i \geq 0$, поэтому он и является оптимальным. Таким образом, получен оптимальный план исходной задачи (4, 0, 2) и максимальное значение целевой функции $f(\overline{X}^*) = 14$.

Тема 4. Нелинейное динамическое программирование

Пример 4. Найти экстремум функции

$$Z = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_2 + x_3 = 2.$$

Решение. Составляем функцию Лагранжа (Приложение, формула 7)

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + x_3 - 2),$$

дифференцируем ее по переменным x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 и полученные выражения приравниваем к нулю:

$$\begin{cases}\lambda_1 + x_2 = 0,\\ x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,\\ x_2 + \lambda_2 = 0,\\ x_1 + x_2 - 2 = 0,\\ x_2 + x_3 - 2 = 0.\end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = — x_2$, поэтому

$$x_1 — 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_2 + x_3 = 2,$$

откуда $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 1$ и $Z^0 = 2$. Поскольку, например, точка (0; 2; 0) принадлежит допустимой области и в ней $Z = 0$, то делаем вывод, что точка (1; 1; 1) — точка глобального максимума.

Тема 5. Балансовые модели

Пример 5. Для трехотраслевой экономической системы заданы матрица коэффициентов прямых материальных затрат и вектор конечной продукции:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти коэффициенты полных материальных затрат и вектор валовой продукции, заполнить схему межотраслевого материального баланса.

Решение.

1. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат по второму (приближенному) способу (Приложение, формула 20), учитывая косвенные материальные затраты до 2-го порядка включительно. Запишем матрицу коэффициентов косвенных затрат 1-го порядка

$$A^{(1)} = A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}20 \\ 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}08 \\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}16 \end{pmatrix},$$

матрицу коэффициентов косвенных затрат 2-го порядка:

$$A^{(2)} = AA^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,23 & 0,12 & 0,20 \\ 0,16 & 0,27 & 0,08 \\ 0,17 & 0,10 & 0,16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,153 & 0,103 & 0,132 \\ 0,126 & 0,159 & 0,080 \\ 0,119 & 0,083 & 0,100 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица коэффициентов полных материальных затрат приближенно равна

$$B \approx E + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1,683 & 0,323 & 0,732 \\ 0,486 & 1,929 & 0,160 \\ 0,589 & 0,283 & 1,460 \end{pmatrix}.$$

2. Определим матрицу коэффициентов полных материальных затрат с помощью формул обращения невырожденных матриц (первый способ) (Приложение, формула 19).

а) Находим матрицу (E—A):

$$(\text{E} — \text{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & -0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

б) Вычисляем определитель матрицы:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & -0,0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,196.$$

в) Транспонируем матрицу (E —A):

$$(E - A)' = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & 0,0 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

г) Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы $(E - A)'$:

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0,5 & -0,1 \\ 0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,40;$ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,1 & -0,1 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,12;$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,5 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,17;$ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,1 & 0,5 \\ -0,4 & 0,0 \end{vmatrix} = 0,20;$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,1 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,10;$ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,33;$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,2 & -0,3 \\ 0,0 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,16;$ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,3 \\ -0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,44.$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}0{,}7 & -0{,}2\\ -0{,}4 & 0{,}0\end{vmatrix}=0{,}08.$$

Таким образом, присоединенная к матрице (Е — А) матрица имеет вид

$$\overline{(E-A)}=\begin{pmatrix}0{,}40 & 0{,}12 & 0{,}20\\ 0{,}16 & 0{,}44 & 0{,}08\\ 0{,}17 & 0{,}10 & 0{,}33\end{pmatrix}.$$

д) Используя формулу 19 (Приложение) находим матрицу коэффициентов полных материальных затрат:

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408\\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684\end{pmatrix}.$$

Как отмечено выше, элементы матрицы В, рассчитанные по точным формулам обращения матриц, больше соответствующих элементов матрицы, рассчитанной по второму приближенному способу без учета косвенных материальных затрат порядка выше 2-го.

3. Найдем величины валовой продукции трех отраслей (вектор X), используя формулу 18 (Приложение):

$$X=BY=\begin{pmatrix}2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020\\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408\\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 100\\ 300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}775{,}3\\ 510{,}1\\ 729{,}6\end{pmatrix}.$$

4. Для определения элементов первого квадранта материального межотраслевого баланса воспользуемся формулой, вытекающей из формулы 15 (Приложение): $x_{ij} = a_{ij}X_j$. Из этой формулы следует, что для получения первого столбца первого квадранта нужно элементы первого столбца заданной матрицы A умножить на величину X_1 = 775,3; элементы второго столбца матрицы A умножить на X_2 = 510,1; элементы третьего столбца матрицы A умножить на X_3 = 729,6. Составляющие третьего квадранта (условно чистая продукция) находятся с учетом формулы 14 (б) (Приложение) как разность между объемами валовой продукции и суммами элементов соответствующих столбцов найденного первого квадранта. Четвертый квадрант в нашем примере состоит из одного показателя и служит, в частности, для контроля правильности расчета: сумма элементов второго квадранта должна в стоимостном материальном балансе совпадать с суммой элементов третьего квадранта. Результаты расчета представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Межотраслевой баланс производства и распределения продукции

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	1	**2**	**3**	**Конечная продукция**	**Валовая продукция**
1 **2** **3**	232,6 155,1 232,6	51,0 255,0 51,0	291,8 0,0 145,9	200,0 100,0 300,0	775,3 510,1 729,6
Условно чистая продукция	155,0	153,1	291,9	600,0	—
Валовая продукция	775,3	510,1	729,6	—	2015,0

Пример 6. Пусть в дополнение к исходным данным примера 5 заданы затраты живого труда (трудовые ресурсы) в трех отраслях: L_1 = 1160, L_2 = 460, L_3 = 875 в некоторых единицах измерения трудовых затрат. Требуется определить коэффициенты прямой и полной трудоемкости и составить межотраслевой баланс затрат труда.

1. Воспользовавшись формулой 14, в (Приложение) и результатами примера 1, находим коэффициенты прямой трудоемкости:

$$t_1 = \frac{1160}{775{,}3} = 1{,}5; \qquad t_2 = \frac{460}{510{,}1} = 0{,}9; \quad t_3 = \frac{875}{729{,}6} = 1{,}2.$$

2. По формуле №14(г), в которой в качестве матрицы B берется матрица коэффициента полных материальных затрат, найденная в примере 1, находим коэффициенты полной трудоемкости:

$$T = (1{,}5;0{,}9;1{,}2)\cdot\begin{pmatrix} 2{,}041 & 0{,}612 & 1{,}020 \\ 0{,}816 & 2{,}245 & 0{,}408 \\ 0{,}867 & 0{,}510 & 1{,}684 \end{pmatrix} = (4{,}84;3{,}55;3{,}92).$$

3. Умножая первую, вторую и третью строки первого и второго квандрантов межотраслевого материального баланса, построенного в примере 1, на соответствующие коэффициенты прямой трудоемкости, получаем схему межотраслевого баланса труда (в трудовых измерителях) (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Межотраслевой баланс затрат труда

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				
	Межотраслевые затраты овеществленного труда			Затраты труда на конечную продукцию	Затраты труда в отраслях (трудовые ресурсы)
	1	2	3		
1	348,9	76,5	437,7	300,0	1163,0
2	139,6	229,5	0,0	90,0	459,1
3	279,1	61,2	175,1	360,0	875,5

Незначительные расхождения между данными таблицы и исходными данными вызваны погрешностями округления при вычислениях.

Тема 6. Модели управления запасами

Пример 8. Пусть некоторая фирма в соответствии с договором реализует со склада по заявкам холодильники, причем ежедневный спрос является случайной величиной, функция плотности, распределения которой представлена графически на рисунке 2 и колеблется от 20 до 80 холодильников в день. Средние издержки хранения одного холодильника в день составляют 8 руб., а штраф за дефицит (недопоставку) одного холодильника в день равен 17 руб. Требуется определить стратегию оптимального пополнения запаса холодильников и полные минимальные средние издержки.

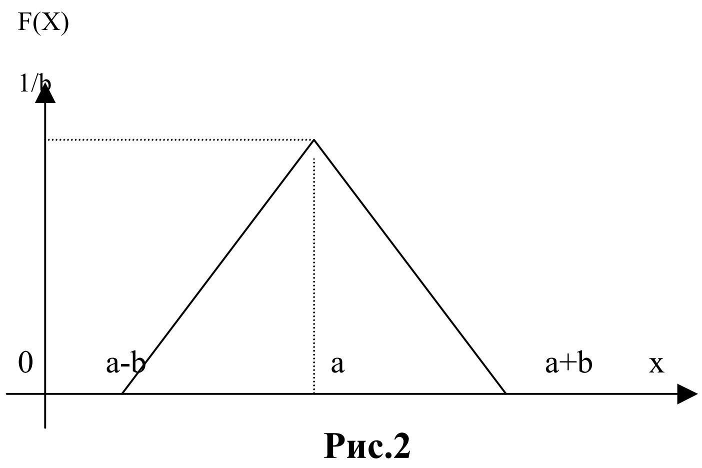


Рис.2

В условиях рассматриваемой задачи b = (80 — 20) / 2 = 30 (хол.); a = (20 + 80) / 2 = 50 (хол.); c = 8 руб.; k = 17 руб.

В соответствии с формулой 21 (Приложение) оптимальный уровень запаса (c < k) составляет $y^* = 50 + 30 - \sqrt{2 \cdot 8/(8+17)} \cdot 30 = 80 - 4/5 \cdot 30 = 56$ (хол.). Тогда величина h_t^* пополнения запаса холодильников фирмой, при которой полные средние издержки будут минимальны, задается в соответствии с формулой 22 (Приложение) правилом:

$$h_t^* = \begin{cases} 0 \quad , & \textit{если} \quad x_{t-1} \geq 56, \\ 56 - x_{t-1}, & \textit{если} \quad x_{t-1} \leq 56, \end{cases}$$

где x_{t-1} — запас холодильников на складе фирмы на конец предыдущего дня. Так, если на конец предыдущего дня на складе фирмы было 60 холодильников, то пополнять запас не следует, а если на конец предыдущего дня на складе фирмы оставалось 25 холодильников, то следует реализовать заказ на пополнение запаса холодильников в количестве 56 – 25 = 31 холодильников.

Если придерживаться этой стратегии пополнения запаса холодильников, то минимальный уровень полных средних издержек в расчете на один день в соответствии с формулой 23 (Приложение) составит:

$$\Phi^* = 30 \cdot 8\left(1 - 2/3\sqrt{2 \cdot 8/(8+17)}\right) = 240 \cdot 7/15 = 112 \text{ руб.}$$

Тема 7. Модель экономически выгодных размеров заказываемых партий

Пример 9. На склад доставляют цемент на барже по 1500 т. В сутки со склада потребители забирают 50 т цемента. Накладные расходы по доставке партии цемента равны 2 тыс. руб. Издержки хранения 1 т цемента в течение суток равны 0,1 руб. Требуется определить: 1) длительность цикла, среднесуточные накладные расходы и среднесуточные издержки хранения; 2) эти же величины для размеров партии в 500 т и в 3000 т; 3) каковы оптимальный размер заказываемой партии и расчетные характеристики работы склада в оптимальном режиме.

Решение. Параметры работы склада: M = 50 т/сут.; К = 2 тыс. руб.; h = 0,1 руб./т·сут.; Q = 1500 т.

1. Длительность цикла:

T = Q : M = 1500 т : 50 т/сут. = 30 сут.;

среднесуточные накладные расходы:

К : T = 2 тыс. руб. : 30 сут. $\approx$ 67 руб./сут.;

среднесуточные издержки хранения:

h · Q/2 = 0,1 руб./т · сут. · 1500 т/2 = 75 руб./сут.

2. Аналогичные расчеты проведем для Q_1 = 500 т:

$T_1 = Q_1$: M = 500 т : 50 т/сут. = 10 сут.;

К : T_1 = 2 тыс. руб. : 10 сут. = 200 руб./сут.;

h · Q_1/2 = 0,1 руб./т · сут. · 500 т/2 = 25 руб./сут.

и для Q_2 = 3000 т:

$T_2 = Q_2$: M = 3000 т : 50 т/сут. = 60 сут.;

К : T_2 = 2 тыс. руб. : 60 сут. $\approx$ 33 руб./сут.;

h · Q_2/2 = 0,1 руб./т · сут. · 3000 т/2 = 150 руб./сут.

3. Найдем оптимальный размер заказываемой партии по формуле Уилсона (Приложение, формула 24):

$$Q_{опт} = \sqrt{\frac{2KM}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 50}{0{,}1}} \approx 1400 \text{ т};$$

оптимальный средний уровень запаса по формуле 25 (Приложение):

$$\overline{Q}_{опт} = Q_{опт} / 2 = 1400 \text{ т}/2 = 700 \text{ т};$$

оптимальную периодичность пополнения запасов по формуле 26 (Приложение):

$$T_{опт} = \frac{Q_{опт}}{M} = \frac{1400 т}{500 т \cdot сут.} = 28 сут.;$$

оптимальные средние издержки хранения запасов в единицу времени по формуле 27 (Приложение):

$$\overline{H}_1 = \overline{Q}_{опт} h = 700 \text{т} \cdot 0{,}1 \text{ руб./т} \cdot \text{сут.} = 70 \text{ руб./сут.}$$

Тема 8. Моделирование систем массового обслуживания

Пример 10. Пусть филиал фирмы по ремонту радиоаппаратуры имеет n = 5 опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт λ = 10 радиоаппаратов. Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует случайного различного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Пусть статистика показала, что время ремонта подчиняется экспоненциальному закону; при этом в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров успевает отремонтировать μ = 2,5 радиоаппарата. Требуется оценить работу филиала фирмы по ремонту радиоаппаратуры, рассчитав ряд основных характеристик данной СМО.
За единицу времени принимаем 1 рабочий день (7 часов).

1. Определим параметр

$$\alpha = \lambda \frac{1}{\mu} = 10 \cdot 1/2{,}5 = 4,$$

так как α < n, то очередь не может расти безгранично.

2. Вероятность того, что все мастера свободны от ремонта аппаратуры, равна согласно формуле 28 (Приложение) :

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + 4^2/2! + 4^3/3! + 4^4/4! + 4^5/5!(1 - 4/5)} = 0{,}013.$$

3. Вероятность того, что все мастера заняты ремонтом, находим по формуле 28 (Приложение):

$$P_n = \frac{4^5 \cdot 0{,}013}{5!(1 - 4/5)} = 0{,}554.$$

Это означает, что 55,4 % времени мастера полностью загружены работой.

4. Среднее время обслуживания (ремонта) одного аппарата согласно формуле 29, (Приложение):

$$\bar{t}_{об} = 1/\mu = 7/2{,}5 = 2{,}8 \text{ч/аппарат}$$

(при условии семичасового рабочего дня).

5. В среднем время ожидания каждого неисправного аппарата начала ремонта равно:

$$\bar{t}_{ОЖ} = \frac{0,554 \cdot 2,8}{5-4} = 1,55 ч$$

6.Очень важной характеристикой является средняя длина очереди, которая определяет необходимое место для хранения аппаратуры, требующей ремонта; находим ее по формуле 28 (Приложение):

$$\bar{L}_{ОЧ} = \frac{0,554 \cdot 4}{5(1-4/5)} \approx 2,2 \text{ аппарата.}$$

7. Определим среднее число мастеров, свободных от работы, по формуле 29 (Приложение):

$$\bar{N}_0 = 0,013\left[\frac{5-0}{1} \cdot 1 + \frac{5-1}{1!} \cdot 4 + \frac{5-2}{2!} \cdot 4^2 + \frac{5-3}{3!} \cdot 4^3 + \frac{5-4}{4!} \cdot 4^4\right] \approx 0,95.$$

Таким образом, в среднем в течение рабочего дня ремонтом заняты четыре мастера из пяти.

Тема 9. Элементы теории игр в задачах моделирования экономических процессов

Пример 11. На базе торговой фирмы имеется n типов товара ассортиментного минимума. В магазин фирмы должен быть завезен только один из этих типов товара. Если товар типа $j(j = \overline{1,n})$ будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль P_j . Если же этот товар не будет пользоваться спросом, то издержки на его хранение принесут магазину убыток q_j . Требуется выбрать тип товара, который целесообразно завезти в магазин.

Решение. В условиях неопределенного покупательского спроса конфликтная ситуация товароснабжения формализуется матричной игрой. Пусть первый игрок – магазин, второй игрок – покупательский спрос. Каждый из игроков имеет по n стратегий. Завоз i-го товара – i-я стратегия первого игрока, спрос на j-ый товар – j-я стратегия второго игрока. Тогда матрица выигрышей первого игрока имеет вид квадратной матрицы n-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} p_1 & -q_1 & \cdots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \cdots & -q_2 \\ . & . & . & . \\ -q_n & -q_n & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Матрица игры имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Минимальный элемент первой строки (первой стратегии первого игрока) равен 2, второй – 5, третьей – 4; максимальное значение из этих величин равно 5. Максимальный элемент первого столбца (первой стратегии второго игрока) равен 10, второго – 10, третьего – 5, четвертого – 14, пятого – 12; минимальное значение из них равно 5. Следовательно, данная игра имеет седловую точку (2, 3) и задача разрешима в чистых стратегиях. Придерживаясь чисто второй стратегии, первый игрок обеспечивает себе выигрыш, не меньший 5; второй игрок, применяя чистую третью стратегию, проигрывает не более 5. Обе стратегии i = 2 и j = 3 являются оптимальными для первого и второго игроков, при этом цена игры V = 5.

Список литературы

1. Горбунов, В.К. Математические модели рационального потребления: Учебное пособие/ Ульян. гос. ун-т. Каф. прикладной математики. -Ульяновск: УГУ, 1997. - 71с.

2. Губин Н. М. и др. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении в отрасли связи: Учебник/Губин Н. М., Добронравов А. С., ,Дорохов Б. С. - М.: Радио и связь, 1993. - 377с.

3. Замков О. О. , Толстопятенко А. В. , Черемных Ю. Н., Сидорович А. В. Математические методы в экономике: Учебник / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных и др.; Под общ. ред А. В. Сидоровича . -М.: Дело и Сервис, 1999. - 367с - (Учебники МГУ им. М. В. Ломоносова).

4. Петров А. М. Математические методы анализа экономики: Учебно-методическое пособие/ Ульян. гос. ун-т, Эконом. фак., Каф. Управления. - Ульяновск: УГУ, 1995. – 10 с.

5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие . - М.: ЮНИТИ, 2000. - 367с.

6. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное.пособие/ В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, и др; Под ред В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 391 с.

Приложение

Основные экономико-математические формулы

№ п/п фор-мулы	Математическая форма записи	Значение формулы
1	max $f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$, $x_j \geq 0$, $b_i \geq 0$, $j = \overline{1,n}$	Каноническая форма записи задачи линейного программирования
2	$\Delta_j = z_j - c_j < 0$, где $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$	Оценка
3	$z_k - c_k = \min(z_j - c_i)$	Симплекс разность
4	$Q = \min \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_r}{a_{rk}}$, $a_{ik} > 0$, $i = \overline{1,m}$	
5	$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$, $j = \overline{1,n}$, $a'_{ij} = \frac{a_{ij} a_{rk} - a_{rj} a_{ik}}{a_{rk}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ $b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}$ для $i = r$, $b'_i = \frac{b_i a_{rk} - b_r a_{ik}}{a_{rk}}$, $i = \overline{1,m}$, для $i \neq r$	Решение систем линейных уравнений методом Жордана-Гаусса
6	$g(\bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j$, $j = \overline{1,n}$, $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$	Модель двойственной задачи
7	$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) +$ $+ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	Функция Лагранжа

Продолжение приложения

8	$\lambda_i = \dfrac{\lvert y_t - y_{t-1}\rvert}{\sigma_y}$, t = 2, 3, …, n, где $\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}{n-1}}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_i}{n}$	Метод Ирвина
9	$\bar{y}_1 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}$; $\sigma_1^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{n_1}(y_t - \bar{y}_1)^2}{n_1 - 1}$; $\bar{y}_2 = \dfrac{\sum_{t=n_1+1}^{n_1} y_t}{n_2}$; $\sigma_2^2 = \dfrac{\sum_{t=n_1+1}^{n_1}(y_t - \bar{y}_2)^2}{n_2 - 1}$	Среднее значение дисперсии
10	$F = \begin{cases} \sigma_1^2 / \sigma_2^2, & \text{если } \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ \sigma_2^2 / \sigma_1^2, & \text{если } \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$	Критерий Фишера
11	$t = \dfrac{\lvert \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \rvert}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$, где $\sigma = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	t-критерий Стьюдента
12	$k_i = \begin{cases} 1, \text{если } y_i \text{ больше всех предыдущих уровней} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$ $l_t = \begin{cases} 1, \text{если } y_t \text{ меньше всех предыдцщих уровней} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$ t = 2, 3,…, n $s = \sum_{t=2}^{n}(k_t + l_t)$; $d = \sum_{t=2}^{n}(k_t - l_t)$, $t_S = \dfrac{\lvert s - \mu \rvert}{\sigma_1}$	Метод Фостера-Стьюарта μ - математическое ожидание величины S, определенной для ряда, в котором уровни расположены случайным образом

Продолжение приложения

	$\sigma_1 = \sqrt{2\ln 2 - 3{,}4253}$; $t_d = \dfrac{\lvert d-0 \rvert}{\sigma_2}$ $\sigma_2 = \sqrt{2\ln n - 0{,}8456}$	σ_1 – среднеквадратическое отклонение для величины S σ_2 – среднеквадратическое отклонение для величины d
13	$\bar{y}_t = \sum_{t=t-p}^{t+p} y_t$, $t > 0$, где $p = \dfrac{m-1}{2}$, где m - нечетное	Метод простой скользящей средней
14	А) $X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Y_j$, $i = \overline{1,n}$ Б) $Xj = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + Z_j$, $j = \overline{1,n}$ В) $t_j = \dfrac{Lj}{Xj}$; $j = \overline{1,n}$ Г) T= t*B	А)Уравнение распределения продукции отраслей материального производства по направленному использованию; Б) Стоимостный состав продукции всех отраслей материального производства В) Прямые затраты на еденицу j-го вида продукции Г) Вектор коэффициентов полной трудоемкости
15	$a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$, $i, j = \overline{1,n}$	a_{ij} - коэффициенты прямых материальных затрат

Продолжение приложения

16	X = AX + Y	Экономико-математическая модель межотрас-левого баланса (модель Леонтьева, модель "затраты-выпуск")
17	$B = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$	Матрица коэффициентов полных материальных затрат
18	X = BY	Вектор валовой продукции
19	$B = \sum_{j=1}^{n} (E-A)^{-1} = \frac{\overline{(E-A)}}{\lvert E-A \rvert}$,	Матрица коэффициентов полных материальных затрат
20	$B \approx E + A + A^2 + ... + A^k$,	Матрица коэффициентов полных материальных затрат
21	$y^* = \begin{cases} a - b + \sqrt{\frac{2k}{c+k}} \cdot b, \text{при } c > k \\ \text{при } c = k \\ a \\ a + b - \sqrt{\frac{2c}{c+k}} \cdot b, \text{при } c < k \end{cases}$	Оптимальный уровень запаса
22	$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{t-1} \geq y^* \\ y^* - x_{t-1} & \text{если } x_{t-1} \leq y^* \end{cases}$	Величина пополнения запасов h_t^*

Продолжение приложения

23	$$\Phi^* = \begin{cases} bk(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2k}{c+k}}) & при\ c>k \\ b\cdot k/3=b\cdot c/3 & при\ c=k \\ b\cdot c(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2c}{c+k}}) & при\ c<k \end{cases}$$	Минимум средних издержек
24	$$Qonm = \sqrt{\frac{2KM}{n}}$$	Формула Уилсона
25	$$\overline{Q}onm = Qonm/2 = \sqrt{KM/2h}$$	Оптимальный средний уровень запаса
26	$$Tonm = Qonm/M = \sqrt{2K/Mh}$$	Оптимальная периодичность пополнения запасов
27	$$\overline{H}1 = \overline{Q}onm \cdot h = \sqrt{KMh/2}$$	Оптимальные средние издержки хранения запасов в единицу времени

Окончание приложения

28	$\overline{L}оч = \dfrac{\alpha Pn}{n\left(1-\alpha/n\right)} = \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!n\left(1-\alpha/n\right)^2} P_o\left(\alpha/n<1\right)$	
29	$\overline{N}_0 = \overline{\sum \dfrac{n-k}{k!}} \cdot \alpha^k P_0$	

ДЕЕВА ***Елена Михайловна***

Методические указания по решению
типовых задач по дисциплине
«Линейная алгебра и линейное программирование»

Корректор А.А. Галушкина

Подписано в печать Формат 60x84/16.

Бумага писчая. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.

Тираж 50 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет,

432027, Ульяновск, Северный Венец, 32

Типография УлГТУ, 432027, Ульяновск, Сев.Венец, 32